Mathematik B (ET) Sommersemester 2022

13. Übungsblatt (30.06.2022)

Beispiel 13.1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems **(2 Pkt.)**

$$\vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}(x)$$

und lösen Sie das Anfangswertproblem $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Antwort: z.B. $\vec{y}(x) = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{3x} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

AWP: $\vec{y}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + e^{3x} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Beispiel 13.2. Bestimmen Sie diejenige Lösung des Differentialgleichungssystems **(2 Pkt.)**

$$\vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \vec{y}(x)$$

welche die Anfangsbedingung $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ erfüllt.

Antwort: $\vec{y}(x) = e^{-3x} \begin{pmatrix} 3 + 4x \\ 2 + 4x \end{pmatrix}$

Beispiel 13.3. Ermitteln Sie ein *reelles* Fundamentalsystem des Systems **(2 Pkt.)**

$$\vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}(x).$$

Antwort: z.B. $\vec{y}(x) = c_1 e^{x} \begin{pmatrix} -\sin(2x) + \cos(2x) \\ 2\cos(2x) \end{pmatrix} + c_2 e^{x} \begin{pmatrix} \sin(2x) + \cos(2x) \\ 2\sin(2x) \end{pmatrix}$

Beispiel 13.4. Wir betrachten das homogene lineare System $\vec{y}\,'(x) = A\vec{y}(x)$ von Differentialgleichungen mit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Der einzige Eigenwert von A ist $\lambda = 1$ mit $\mu(1) = 3$. (Dies dürfen Sie ohne Beweis annehmen.) **(3 Pkt.)**

(a) Zeigen Sie, dass $\nu(1) = 2$ gilt und dass $\vec{v}^{[1]} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}^{[2]} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraumes bilden.

(b) Rechnen Sie nach, dass es keinen Vektor $\vec{v}$ mit $(A - I)\vec{v} = \vec{v}^{[1]}$ oder $(A - I)\vec{v} = \vec{v}^{[2]}$ gibt.

(c) Finden Sie einen Vektor $\vec{v}^{[3]}$ mit $(A-I)\vec{v}^{[3]} = \vec{v}^{[1]} + \vec{v}^{[2]}$.

(d) Zeigen Sie mit Hilfe der Wronski-Determinante, dass die Lösungen $\vec{y}^{[1]}(x) = e^x \vec{v}^{[1]}$, $\vec{y}^{[2]}(x) = e^x \vec{v}^{[2]}$ und $\vec{y}^{[3]}(x) = e^x \left(\vec{v}^{[3]} + x\left(\vec{v}^{[1]} + \vec{v}^{[2]}\right)\right)$ ein Fundamentalsystem bilden.

Beispiel 13.5. Ermitteln Sie die allgemeine Lösung des Systems **(3 Pkt.)**

$$\vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(x) + \begin{pmatrix} 7x - 3 + 12e^{5x} \\ x - 4 - 9e^{5x} \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Ansatzmethode.
Antwort: z.B. $\vec{y}(x) = c_1 e^{-2x} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x + 3e^{5x} \\ 1 - 2x \end{pmatrix}$