

Mathematik B (ET) Sommersemester 2022

3. Übungsblatt (24.03.2022)

Beispiel 3.1. Bestimmen Sie das Integral

(2 Pkt.)

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

durch die Substitution von $y = \pi - x$ und die Identitäten: $\sin(\pi - y) = \sin(y)$, $\cos(\pi - y) = -\cos(y)$. [Antwort: $\frac{\pi^2}{4}$]

Beispiel 3.2.

(3 Pkt.)

Sei D der endliche Flächenbereich, der von der Geraden $y = x - 2$ und der Parabel $y = -x^2 + 3x - 2$ begrenzt wird.

- (a) Zeichnen Sie den Flächenbereich D .
- (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt A von D mit Hilfe des folgenden Satzes. Satz: Seien $f(x), g(x)$ stetig im Intervall $[a, b]$ und $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ der Flächeninhalt, der durch die Kurven $f(x)$ und $g(x)$ und die Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzten Bereich.

Beispiel 3.3. Bestimmen Sie die Bogenlänge der Parabel $y = x^2$ von $x = 0$ bis $x = 1$. Hinweis: Partielle Integration.

(3 Pkt.)

Beispiel 3.4. Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve

(3 Pkt.)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r(t - \sin t) \\ r(1 - \cos t) \end{pmatrix}$$

im Zeitintervall $[0, 4\pi]$. Hinweis: Verwenden Sie beim Integrieren die Formel für den Kosinus von Doppelwinkeln. [Antwort: $16r$]

Beispiel 3.5. Seien $f(x), g(x)$ stetige Funktionen, die sich in den Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$, $a < b$, schneiden, wobei $f(x) > g(x)$ in (a, b) . Die Schwerpunktskoordinaten der durch $f(x)$ und $g(x)$ begrenzten Fläche D ergeben sich durch den Formeln

(3 Pkt.)

$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x(f(x) - g(x)) dx,$$
$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx,$$

wobei A der Flächeninhalt von D ist.

Berechnen Sie die Schwerpunktskoordinaten (x_s, y_s) der Fläche, die durch die x -Achse und die Kurve $y = \sqrt{\alpha^2 - x^2}$, $\alpha > 0$, begrenzt wird. Hinweis: Für das Integral $\int \sqrt{\alpha^2 - x^2} dx$ verwenden Sie die Substitution $x = \alpha \cos y$ oder $x = \alpha \sin y$. [Antwort: $(0, \frac{4\alpha}{3\pi})$]