

Mathematik B (ET) Sommersemester 2022

4. Übungsblatt (31.03.2022)

Beispiel 4.1. Berechnen Sie die Näherungen des Integrals

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

durch

- (a) Trapezregel, Simpsonregel, $\frac{3}{8}$ -Regel und Milne-Regel; (2 Pkt.)
- (b) Zerlegung von $[0, 1]$ in 2, in 4 und in 6 gleichlange Intervalle, dort jeweils Trapezregel. (2 Pkt.)

Vergleichen Sie diese Näherungen mit $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,746824$.

Beispiel 4.2. (2 Pkt.)

- (a) Berechnen Sie die Näherung des Integrals

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x dx$$

durch die Milne-Regel.

- (b) Berechnen Sie die Differenz zwischen Ihrer Näherung aus (a) und dem exakten Wert des Integrals. Vergleichen Sie diese Differenz mit der Fehlerschranke, die sich aus der Fehlerformel nach der Milne-Regel ergibt.

Beispiel 4.3. Rechnen Sie nach, dass für $m, n \in \mathbb{N}_0$ die in der Vorlesung behauptete Orthogonalitätsrelation gilt: (2 Pkt.)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m = n = 0, \\ \pi & \text{für } m = n \neq 0, \\ 0 & \text{für } m \neq n. \end{cases}$$

Beispiel 4.4. Wir definieren die Funktion f durch (4 Pkt.)

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi, \\ \cos(x) & \text{für } \frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

auf $[0, 2\pi]$ und setzen die Funktion 2π -periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort.

- (a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.
- (b) Entwickeln Sie $f(x)$ als Fourierreihe.
Beachten Sie die Formel

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

(und nicht, wie sie im Skript geschrieben ist).