

Mathematik B (ET) Sommersemester 2022

6. Übungsblatt (28.04.2022)

Beispiel 6.1. Untersuchen Sie, an welchen Stellen die folgende Funktion stetig ist. (2 Pkt.)
Hinweis: Betrachten Sie $(x - y)^2 \geq 0$.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \\ \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right) \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 6.2. Untersuchen Sie, an welchen Stellen die folgenden Funktionen stetig sind. Hinweis: Polarkoordinaten können helfen. (3 Pkt.)

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{x^3 - 2xy + 3y^2}{\sqrt{2x^2 + 4y^2}} & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{x^2 \sin y + y \cos x}{3x^2 + 2y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 6.3. Seien $f(x, y), g(x, y)$ die Funktionen aus Beispiel 6.2. An welchen Stellen existieren die partielle Ableitungen f_x, f_y und g_x, g_y ? Geben Sie die partiellen Ableitungen an, wann immer sie existieren. (3 Pkt.)

Beispiel 6.4. Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion (2 Pkt.)

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{xy^2}{x^2 + (x + y^2)^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt $(0, 0)$ in eine allgemeine Richtung $\vec{v} = (v_1, v_2)$ mit $\|\vec{v}\| = 1$.

Beispiel 6.5. Berechnen Sie den Gradienten und die Richtungsableitungen der Funktion (3 Pkt.)

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 - z + x^2 z + \cos(xy + z^2) + yz$$

im Punkt $\vec{a} = (-1, 1, -1)$ in die Richtungen

$$\vec{v} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

In welche Richtungen ist die Richtungsableitung von f in $\vec{a}$ maximal, minimal, bzw. Null?