

Mathematik B (ET) Sommersemester 2022

7. Übungsblatt (05.05.2022)

Beispiel 7.1. Gegeben ist die Funktion

(4 Pkt.)

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0), \\ (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass $f(x, y)$ in $\mathbb{R}^2$ stetig ist.
- (b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $f_x(x, y), f_y(x, y)$ in allen Punkten $(x, y) \neq (0, 0)$.
- (c) Zeigen Sie, dass $f_x(0, 0)$ und $f_y(0, 0)$ existieren und geben Sie ihre Werte an.
- (d) Zeigen Sie, dass $f(x, y)$ in $(0, 0)$ total differenzierbar ist, aber $f_x(0, 0)$ nicht stetig in $(0, 0)$ ist.

Beispiel 7.2. Gegeben ist die Fläche

(3 Pkt.)

$$F(x, y, z) = x + y + z - 4 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$$

und der Punkt $\vec{x}_0 = (2, 3)$.

- (a) Stellen Sie die Fläche in der expliziten Form $z = f(x, y)$ in der Nähe des Punktes $\vec{x}_0$ dar.
- (b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene der Fläche im Punkt $\vec{x}_0$.
Antwort: $5x + 4y + z = 28$

Beispiel 7.3. Sei $u = f(x, y, z) = xyz$, wobei $x = g_1(t) = t^2$, $y = g_2(t) = \ln(t)$ und $z = g_3(t) = \cos(t^2)$. Verwenden Sie die Kettenregel um $\frac{du}{dt}$ zu bestimmen und berechnen Sie $\frac{du}{dt}(1)$.

(1 Pkt.)

Beispiel 7.4. Seien u und v Funktionen von x, y , d.h. $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, gegeben durch das System

(3 Pkt.)

$$\begin{cases} 1 &= xu + yv, \\ 1 &= x + y + u + v. \end{cases} \quad (*)$$

Bestimmen Sie u_x, u_y, v_x, v_y durch die Anwendung impliziter Ableitungen der Gleichungen (*).

Antwort(Teil): $u_x = \frac{y - u}{x - y}, \dots$

Beispiel 7.5. Als *Taylorpolynom* zweiten Grades einer Funktion $f(\vec{x})$ um einen Entwicklungspunkt $\vec{x}_0$ bezeichnen wir das Polynom $T_2(\vec{x})$, für das $f(\vec{x}) = T_2(\vec{x}) + \epsilon_2(\vec{x} - \vec{x}_0)$ gilt, wobei $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\epsilon_2(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2} = 0$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(x, y)$ von

(2 Pkt.)

$$f(x, y) = \cos(xy) + xe^{y-1}$$

mit dem Entwicklungspunkt $\vec{x}_0 = (\pi, 1)$.

Antwort(Teil): $T_2(x, y) = -1 + \frac{\pi}{2} + 2\pi^2 + \dots + (1 + \pi)xy + \frac{1}{2}(\pi + \pi^2)y^2$.