Mathematik B (ET) Sommersemester 2022

9. Übungsblatt (19.05.2022)

Beispiel 9.1. Finden Sie ein Parallelepiped mit einem maximalen Volumen und ein Parallelepiped mit einem minimalen Volumen, wenn die Summe der Längen der 12 Kanten 20 ist und die Summe der Flächen der 6 Seiten 16 ist. Hinweise: Bezeichnen Sie drei zueinander orthogonale Kanten als x, y und z und das Volumen ist dann: $V = xyz$. **(3 Pkt.)**
Antwort: Das Volumen ist $4\frac{4}{27}$ bzw. 4

Beispiel 9.2. Sei $\vec{F}(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit stetigen zweiten partiellen Ableitungen. **(3 Pkt.)**

(a) Beweisen Sie, dass

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla\langle\nabla, \vec{F}\rangle - \Delta\vec{F},$$

wobei $\Delta\vec{F} = (\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3)$ und Δ in den einzelnen Koordinaten den (skalaren) Laplace-Operator bezeichnet, d.h.

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\vec{F}) = \mathbf{grad}(\mathbf{div}\vec{F}) - \text{Vektor-Laplace-Operator von } \vec{F}.$$

(b) Demonstrieren Sie die in (a) angegebene Gleichung für das Vektorfeld $\vec{F}(x,y,z) = (3xz^2, -yz, x+2z)$.
Antwort: $(-6x, 0, 6z-1)$

Beispiel 9.3. Gegeben ist das Vektorfeld **(2 Pkt.)**

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} ayz + abx^2 \\ a^2xz - b^2z \\ xy - 4y - bz^2 \end{pmatrix},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Rotation und die Divergenz von $\vec{v}$. Für welche Werte von a und b ist das Feld wirbelfrei bzw. quellenfrei? Wo liegen die Quellen und die Senken des Feldes wenn $a > 0$ und $b < 0$?

Beispiel 9.4. Gegeben ist die Funktion **(3 Pkt.)**

$$f(x,y) = \frac{x}{1 + x^2y^2}.$$

Berechnen Sie das Doppelintegral $\iint_B f(x,y)dxdy$, wobei B das Rechteck $B = [-1,0] \times [1,2]$ ist, indem Sie

(a) zuerst nach x und dann nach y integrieren: $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$;

(b) zuerst nach y und dann nach x integrieren: $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$.