

Konversatorium Mathematik B (ET)

Sommersemester 2023

5. Übungsblatt (17.04.2023)

Beispiel 5.1. Bestimmen Sie alle $k \in \mathbb{R}_{>0}$, für die das Integral

$$\int_1^{\infty} \sin(t^k) dt$$

konvergiert.

Beispiel 5.2. Überprüfen Sie folgende Integrale mithilfe des Vergleichskriteriums auf Konvergenz.

(a) $\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$

(b) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^5+x^7}} dx$

Beispiel 5.3. Berechnen Sie die folgenden Integrale, falls sie konvergent sind. Zeigen Sie anderenfalls deren Divergenz.

(a) $\int_0^{\infty} 2xe^{-cx} dx$, wobei $c > 0$ eine Konstante ist

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{(1+x^4)^{1/4}} dx$

(c) $\int_1^e \frac{x^3 - 3x^3 \ln(x) - 1}{x(x^3 - 1)^2} dx$ (Hinweis: Eine Stammfunktion ist $\frac{\ln(x)}{x^3 - 1}$)

(d) $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^3} dx$

Beispiel 5.4. Die Funktionen $f(x), g(x)$ seien stetig differenzierbar auf $(0, \infty)$ und erfüllen für alle $x \geq 1$ die Bedingungen

$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{x^2} \leq g(x) \leq \frac{1}{x^{3/4}}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie folgenden Aussagen:

(a) $\int_3^{\infty} 42g(x) dx$ konvergiert stets.

(b) $\int_5^{\infty} g'(x)e^{g(x)} dx$ konvergiert stets.

(c) $\int_1^{\infty} f(x)g(x) dx$ konvergiert stets.