Konversatorium Mathematik B (ET)
Sommersemester 2023

8. Übungsblatt (22.05.2023)

Beispiel 8.1. Sei $\vec{F}(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit stetigen zweiten partiellen Ableitungen.

(a) Beweisen Sie, dass die Divergenz der Rotation eines Vektorfeldes verschwindet, also dass
$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0.$$

(b) Sei $\vec{G}(x,y,z) = (g_1(x,y,z), g_2(x,y,z), g_3(x,y,z)) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein weiteres Vektorfeld mit stetigen zweiten partiellen Ableitungen. Beweisen Sie, dass
$$\nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\nabla \vec{G}) \cdot \vec{F} + (\nabla \vec{F}) \cdot \vec{G}.$$

Beispiel 8.2. Berechnen Sie Rotation, Divergenz des Vektorfelds
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 z \\ 4xyz \\ y - 3xz^2 \end{pmatrix}$$
Berechnen Sie den Laplace-Operator des Gradienten des Vektorfeldes.

Beispiel 8.3. (a) Berechnen Sie das Doppelintegral
$$\int\int_B e^y \mathrm{d}A,$$
wobei B das Rechteck ist, welches durch $y = \ln(x)$ und $y = \frac{1}{e-1}(x-1)$ beschränkt ist.

(b) Berechnen Sie das Doppelintegral
$$\int_{-1}^{1}\int_{1}^{2} \frac{x(\tan(x))^2}{1+\ln(y)} \mathrm{d}A,$$