

Mathematik B (ET) Sommersemester 2023

10. Übungsblatt (01.06.2023)

Beispiel 10.1. Sei B der durch $0 \leq x$, $0 \leq y \leq x^2$, $x^2 + y^2 \leq 2$ definierte Bereich und sei $f(x, y) = xy$. (3 Pkt.)

(a) Zeichnen Sie den Bereich B in der xy -Ebene.

(b) Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\iint_B f(x, y) d\vec{x}$$

in zwei Integrationsreihenfolgen: als $\iint_B f(x, y) dx dy$ und als $\iint_B f(x, y) dy dx$.

Bemerkung: Eine der Integrationsreihenfolgen erfordert die Aufspaltung von B in zwei Gebiete.

Beispiel 10.2. Berechnen Sie $\iiint_E 3z d\vec{x}$, wobei E der Bereich innerhalb $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist. (3 Pkt.)

Hinweis: Verwenden Sie Kugelkoordinaten und bestimmen Sie zunächst die neuen Integrationsgrenzen.

Beispiel 10.3. Wir berechnen das Integral (3 Pkt.)

$$\iint_R (x - y)e^{x^2 - y^2} d\vec{x},$$

wobei R der Bereich ist, der durch die Geraden $x + y = 1$ und $x + y = 3$ und durch die Kurven $x^2 - y^2 = -1$ und $x^2 - y^2 = 1$ beschränkt ist.

(a) Verwenden Sie die Transformation $u = x - y$ und $v = x + y$, um zu zeigen, dass R in den Bereich $S = \{(u, v) \mid 1 \leq v \leq 3, -\frac{1}{v} \leq u \leq \frac{1}{v}\}$ transformiert werden kann.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante der Transformation.

(c) Berechnen Sie Integral mithilfe obiger Transformation.

Beispiel 10.4. Bestimmen Sie mithilfe der Variablentransformation (2 Pkt.)

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}$$

den Wert des Integrals $\iint_B \frac{4x}{y} e^{xy} dx dy$, wobei B der von den Kurven $y = \frac{1}{2x}$, $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{x}{2}$ und $y = 2x$ berandete Bereich im ersten Quadranten (also $x, y > 0$) ist.

Beispiel 10.5. Berechnen Sie das Kurvenintegral (2 Pkt.)

$$\oint_C \left\langle \begin{pmatrix} ye^{x^2 - y^2} \\ xe^{x^2 - y^2} \end{pmatrix}, \vec{n} \right\rangle ds,$$

wobei C den Rand des Quadrats mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ und $(0, 1)$ (durchlaufen in dieser Reihenfolge) bezeichnet

(a) direkt anhand der Definition von Kurvenintegralen,

(b) mithilfe des Satzes von Gauß.

Beispiel 10.6. Berechnen Sie die Arbeit W der Kraft (2 Pkt.)

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{1}{y+1}, -\frac{1}{x+1} \right)$$

entlang der Parabel $\vec{x}(t) = (t, t^2)$ zwischen den Punkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$.