Mathematatik B (ET) Sommersemester 2023

13. Übungsblatt (29.06.2023)

Beispiel 13.1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems **(2 Pkt.)**

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}(x)$$

und lösen Sie das Anfangswertproblem $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Beispiel 13.2. Bestimmen Sie diejenige Lösung des Differentialgleichungssystems **(2 Pkt.)**

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \vec{y}(x)$$

welche die Anfangsbedingung $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ erfüllt.

Beispiel 13.3. Ermitteln Sie ein *reelles* Fundamentalsystem des Systems **(2 Pkt.)**

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}(x).$$

Beispiel 13.4. Wir betrachten das homogene lineare System $\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x)$ von Differentialgleichungen mit **(4 Pkt.)**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Der einzige Eigenwert von A ist $\lambda_1 = 1$ und dieser Eigenwert hat Vielfachheit 3 (dies dürfen Sie ohne Beweis verwenden).

(a) Zeigen Sie, dass der allgemeine Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ von der Form $r\vec{v}_1 + s\vec{v}_2$ mit $(r, s) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist, wobei

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\vec{y}_1(x) = e^{\lambda_1 x}\vec{v}_1$ und $\vec{y}_2(x) = e^{\lambda_1 x}\vec{v}_2$ Lösungen des Systems sind.

(b) Rechnen Sie nach, dass es *keinen* Vektor $\vec{v}$ gibt mit $(A - \lambda_1 I_3)\vec{v} = \vec{v}_1$ oder mit $(A - \lambda_1 I_3)\vec{v} = \vec{v}_2$.

(c) Ermitteln Sie einen Vektor $\vec{v}_3$ mit $(A - \lambda_1 I_3)\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ und rechnen Sie nach, dass $\vec{y}_3(x) = e^{\lambda_1 t}(\vec{v}_3 + x(\vec{v}_1 + \vec{v}_2))$ eine Lösung des Systems ist.

(d) Zeigen Sie anhand der Wronski-Determinante, dass $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$ und $\vec{y}_3$ ein Fundamentalsystem bilden.