

Mathematik B (ET) Sommersemester 2023

3. Übungsblatt (23.03.2023)

Beispiel 3.1. Die Funktion f sei stückweise definiert durch

(3 Pkt.)

$$f(x) = \begin{cases} (\cos(3x) - x^2)(\sin(3x) - x^3)^5 & \text{wenn } -\pi \leq x < -1, \\ |x| & \text{wenn } -1 \leq x < 1, \\ \sin(x) \cos(x) & \text{wenn } 1 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Berechnen Sie

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Beispiel 3.2. Berechnen Sie das Integral

(2 Pkt.)

$$\int_{-\pi}^{2\pi} |\cos(x)| dx,$$

und vergleichen Sie das Ergebnis mit

$$\left| \int_{-\pi}^{2\pi} \cos(x) dx \right|.$$

Beispiel 3.3. Sei D der endliche Flächenbereich, der von der Geraden $y = 3x - 6$ und der Kurve $y = -x^2 + 5x - 6$ begrenzt wird.

(3 Pkt.)

- Zeichnen Sie den Flächenbereich D .
- Berechnen Sie den Flächeninhalt A von D mithilfe des folgenden Satzes. Satz: Seien $f(x), g(x)$ stetig im Intervall $[a, b]$ und $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ der Flächeninhalt, der durch die Kurven $f(x)$ und $g(x)$ und die Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird.

Beispiel 3.4. Berechnen Sie das bestimmte Integral

(2 Pkt.)

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

mithilfe partieller Integration.

Beispiel 3.5. Bestimmen Sie die Bogenlänge der Geraden $y_k = k \cdot x$ (für $k = 1, 2, 3$) von $x = 0$ bis $x = 1$ durch

(3 Pkt.)

- geometrische Betrachtung (Satz des Pythagoras),
- die Formel zur Berechnung der Bogenlänge von Kurven.

Berechnen Sie anschließend die Bogenlänge der Parabel $y = x^2$ von $x = 0$ bis $x = 1$.

Beispiel 3.6. Bestimmen Sie die Bogenlänge der Zykloiden mit gegebenem Radius r :

(3 Pkt.)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r(t - \sin(t)) \\ r(1 - \cos(t)) \end{pmatrix}$$

im Zeitintervall $[0, 2\pi]$. Hierbei dürfen Sie das Additionstheorem $1 - \cos(x) = 2(\sin(x/2))^2$ benutzen.