

# Mathematik B (ET) Sommersemester 2023

## 4. Übungsblatt (30.03.2023)

---

**Beispiel 4.1.** Berechnen Sie die Näherungen des Integrals

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x)}{x}$$

durch

(a) Trapezregel, Simpsonregel und Milne-Regel; (2 Pkt.)

(b) Zerlegung von  $[0, 2\pi]$  in 2, in 4 und in 6 gleichlange Intervalle, dort jeweils Trapezregel. (2 Pkt.)

Vergleichen Sie diese Näherungen mit  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x)}{x} \approx 1,41815$ .

**Beispiel 4.2.** (2 Pkt.)

(a) Berechnen Sie die Näherung des Integrals

$$\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

durch die Milne-Regel.

(b) Berechnen Sie die Differenz zwischen Ihrer Näherung aus (a) und dem exakten Wert des Integrals. Vergleichen Sie diese Differenz mit der Fehlerschranke, die sich aus der Fehlerformel nach der Milne-Regel ergibt.

**Beispiel 4.3.** Rechnen Sie nach, dass für  $m, n \in \mathbb{N}_0$  die in der Vorlesung behauptete Orthogonalitätsrelation gilt: (2 Pkt.)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m = n = 0, \\ \pi & \text{für } m = n \neq 0, \\ 0 & \text{für } m \neq n. \end{cases}$$

**Beispiel 4.4.** Wir definieren die Funktion  $f$  durch (4 Pkt.)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x < \pi, \\ \pi & \text{für } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

auf  $[0, 2\pi]$  und setzen die Funktion  $2\pi$ -periodisch auf ganz  $\mathbb{R}$  fort.

(a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen im Intervall  $-2\pi < x < 2\pi$ .

(b) Entwickeln Sie  $f(x)$  als Fourierreihe.

(c) Überprüfen Sie die Fourierreihe auf punktweise Konvergenz und bestimmen Sie in diesem Fall die Grenzfunktion  $f$ .