

Mathematik B (ET) Sommersemester 2023

5. Übungsblatt (20.04.2023)

Beispiel 5.1. Bestimmen Sie alle $k \in \mathbb{R}$, für die das Integral

(2 Pkt.)

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{kt}{1+t^2} - \frac{1}{2t} \right) dt$$

konvergiert.

Beispiel 5.2. Überprüfen Sie die folgenden Integrale mithilfe des Vergleichskriteriums auf Konvergenz.

(a)

(3 Pkt.)

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(8x^2 + x^4)^{1/3}} \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + \sqrt{x}} dx$$

(b)

(3 Pkt.)

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 1}} \quad \text{und} \quad \int_1^{\infty} e^{-(x^a)} dx \quad \text{wobei } a > 0$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $x^a > 2 \ln x$ und $e^{-(x^a)} < x^{-2}$ für hinreichend große x gilt.

Beispiel 5.3. Berechnen Sie die folgenden Integrale, falls sie konvergent sind. Zeigen Sie anderenfalls deren Divergenz.

(a)

(3 Pkt.)

$$\int_0^1 \ln(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{-1}^4 \frac{x}{x^2 - 9} dx$$

(b)

(3 Pkt.)

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad \text{und} \quad \int_2^{\infty} \frac{dx}{(x+3)(x+1)^2}$$

Beispiel 5.4. Überprüfen Sie das Integral mithilfe des Vergleichskriteriums auf Konvergenz.

(2 Pkt.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}.$$

Beispiel 5.5. Die Funktion $f(x)$ sei stetig differenzierbar auf $(0, \infty)$ und erfülle für alle $x \geq 1$ die Bedingung

(2 Pkt.)

$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie folgenden Aussagen:

(a) $\int_1^{\infty} \sqrt{f(x)} dx$ konvergiert stets.

(b) $\int_1^{\infty} f'(x) \ln(f(x)) dx$ konvergiert stets. [Hinweis: Zeigen Sie, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)(\ln(f(x)) - 1)) = 0$.]