Mathematik B (ET) Sommersemester 2023

6. Übungsblatt (27.04.2023)

Beispiel 6.1. Berechnen Sie, falls existent, die Grenzwerte der folgenden Funktionen: **(3 Pkt.)**

(a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$$

(b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

(c)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$$

Beispiel 6.2. Untersuchen Sie, an welchen Stellen die folgende Funktion stetig ist. Hinweis: Nenner geeignet erweitern. **(2 Pkt.)**

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 6.3. Untersuchen Sie, an welchen Stellen die folgenden Funktionen stetig ist. Hinweis: Polarkoordinaten können helfen. **(3 Pkt.)**

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \frac{y^2(\sin(x))^2}{x^4+y^4} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 6.4. Sei $f(x,y)$ die Funktion aus Beispiel 6.2. An welchen Stellen existieren die partiellen Ableitungen f_x, f_y? Geben Sie die partiellen Ableitungen an, wann immer sie existieren. Hinweis: Erweitern Sie den Nenner wieder geeignet. **(2 Pkt.)**

Beispiel 6.5. Berechnen Sie die Richtungsableitungen der Funktion **(2 Pkt.)**

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \frac{x^4y}{2x^4+y^4} & \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ in eine allgemeine Richtung $\vec{v} = (a,b)$ mit $\|\vec{v}\| = 1$.

Beispiel 6.6. Berechnen Sie den Gradienten und die Richtungsableitungen der Funktion **(3 Pkt.)**

$$f(x,y,z) = x^4y^3z^2 + \cos(xy^2+z) - 2\sqrt{z} + xz$$

im Punkt $\vec{a} = (-1,1,1)$ in die Richtungen

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{v}_2 = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

In welche Richtungen ist die Richtungsableitung von f in $\vec{a}$ maximal, minimal, bzw. Null?