Mathematik B (ET) Sommersemester 2023

7. Übungsblatt (04.05.2023)

Beispiel 7.1. Gegeben ist die Funktion **(4 Pkt.)**

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $f_x(x,y), f_y(x,y)$ in allen Punkten $(x,y) \neq (0,0)$.

(c) Zeigen Sie, dass $f_x(0,0)$ und $f_y(0,0)$ existieren und geben Sie ihre Werte an.

(d) Zeigen Sie, dass $f(x,y)$ in $(0,0)$ total differenzierbar ist.

Beispiel 7.2. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch **(2 Pkt.)**

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \frac{xy^3}{x^2+y^4} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie mithilfe der Definition der totalen Differenzierbarkeit, dass f in $(0,0)$ nicht total differenzierbar ist.
Hinweis: Wählen Sie als $\vec{k}$ den Gradienten von f im Punkt $(0,0)$ und finden Sie einen Weg, bei dem der Grenzwert $\neq 0$ ist.

Beispiel 7.3. Gegeben ist die Funktion **(2 Pkt.)**

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \frac{e^{x^2+y^2-1}}{x^2+y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Überprüfen Sie, ob $f(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0,0)$.

(c) Ist f im Punkt $(0,0)$ total differenzierbar?

Beispiel 7.4. Bestimmen Sie die Ebenengleichung der Tangentialebene der Fläche **(2 Pkt.)**

$$z = f(x,y) := x^3 + 2x^2y - y^2 + \cos(xy)$$

in einem allgemeinen Punkt $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$. Bestimmen Sie die Gleichung dann für den Punkt $(0, 1, f(0,1))$.

Beispiel 7.5. Für eine stetig differenzierbare Funktion $f(x,y,z)$ betrachten wir die zugehörige Funktion **(2 Pkt.)**

$$F(r,\varphi,\theta) := f\left(r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta)\right)$$

in Kugelkoordinaten. Berechnen Sie mithilfe der Kettenregel die partiellen Ableitungen F_r, F_φ und F_θ von F in Abhängigkeit von f_x, f_y und f_z.

Beispiel 7.6. Sei $f(x,y)$ die Funktion aus Aufgabe 7.1. Zeigen Sie, dass **(3 Pkt.)**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

Ist dies ein Widerspruch zum Satz von Schwarz?