

Mathematik B (ET) Sommersemester 2023

9. Übungsblatt (25.05.2023)

Beispiel 9.1. Bestimmen Sie alle globalen Extremstellen von $f(x, y)$ auf der Menge D : (3 Pkt.)

$$f(x, y) = xy^2 - 9x, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

Bestimmen Sie zudem den Typ (Maximum, Minimum, Sattelpunkt) der Extremstellen im Inneren von D und den Typ der Extremstellen auf dem Rand von D .

Beispiel 9.2. (3 Pkt.)

Sei $\vec{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit stetigen zweiten partiellen Ableitungen.

(a) Beweisen Sie, dass

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla \langle \nabla, \vec{F} \rangle - \Delta \vec{F},$$

wobei $\Delta \vec{F} = (\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3)$ und Δ in den einzelnen Koordinaten den (skalaren) Laplace-Operator bezeichnet, d.h.

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \vec{F}) = \mathbf{grad}(\mathbf{div} \vec{F}) - \text{Vektor-Laplace-Operator von } \vec{F}.$$

(b) Demonstrieren Sie die in (a) angegebene Gleichung für das Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z) = (2x + y^2, -yz, x^2z + y)$.

Beispiel 9.3. Gegeben ist das Vektorfeld (3 Pkt.)

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + 2y + az \\ bx - 3y - z \\ 4x + cy + 2z \end{pmatrix},$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Rotation und die Divergenz von \vec{v} . Für welche Werte von a und b ist das Feld wirbelfrei bzw. quellenfrei?

Beispiel 9.4. Gegeben ist die Funktion (3 Pkt.)

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Berechnen Sie das Doppelintegral $\int \int_B f(x, y) dA$, wobei B das Rechteck $B = [0, 1] \times [0, 1]$ ist, indem Sie

(a) zuerst nach x und dann nach y integrieren: $\int_c^d (\int_a^b f(x, y) dx) dy$;

(b) zuerst nach y und dann nach x integrieren: $\int_a^b (\int_c^d f(x, y) dy) dx$.

Vergleichen Sie die Ergebnisse. Was stellen Sie fest und wieso ist das so?

Beispiel 9.5. Berechnen Sie das Doppelintegral (2 Pkt.)

$$\int \int_B xy \cos(yx^2) dA,$$

wobei B das Rechteck $B = [-2, 3] \times [-1, 1]$ ist.

Hinweis: Entscheiden Sie sich für diejenige Integrationsreihenfolge, bei der die Rechnung einfacher ist.