

# Mathematik B (ET) Sommersemester 2024

## 1. Übungsblatt (14.03.2024)

**Beispiel 1.1.** Berechnen Sie Ober- und Untersummen

(a) von  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(x)$  bezüglich der Zerlegung  $Z = \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \pi\}$ ; (2 Pkt.)

(b) von  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 3x^2 + 2x$  bezüglich der äquidistanten Zerlegung  $Z_n = \{x_0, \dots, x_n\}$  von  $[0, 1]$  für allgemeines  $n$ . Wie groß muss  $n$  gewählt werden, damit  $O(Z_n, g) - U(Z_n, g) < \frac{1}{1000}$  gilt? (3 Pkt.)

*Hinweis: Ober-/Untersumme kann hier als Summe stehen gelassen werden. Berechnen Sie die Summe erst bei der Differenz unter Verwendung der Gauß'schen Summenformel (Summe der ersten  $n$  Zahlen ist  $n(n+1)/2$ ).*

**Beispiel 1.2.** Gegeben ist die Funktion

(3 Pkt.)

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \cdot (-1)^{\lfloor x \rfloor},$$

wobei

$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

Zeigen Sie, dass  $f$  auf jedem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  integrierbar ist und berechnen Sie das Integral

$$\int_0^5 f(x) dx.$$

**Beispiel 1.3.** Berechnen Sie das Integral

(2 Pkt.)

$$\int_0^{4\pi} |\cos(x)| dx$$

und vergleichen Sie das Ergebnis mit

$$\left| \int_0^{4\pi} \cos(x) dx \right|.$$

**Beispiel 1.4.** Sei  $f$  stetig und  $c \in \mathbb{R}$  eine Konstante. Zeigen Sie unter Verwendung von Stammfunktionen, dass

(2 Pkt.)

$$\int_{ca}^{cb} f(x) dx = c \int_a^b f(cx) dx$$

gilt.

**Beispiel 1.5.** Ermitteln Sie die Integrale durch partielle Integration

(3 Pkt.)

(a)  $\int (x - 2x^2) \cos(3x) dx.$

(b)  $\int \ln(2x - 1) dx.$

(c)  $\int (\ln(x))^2 dx.$

**Beispiel 1.6.** Ermitteln Sie das Integral

(2 Pkt.)

$$\int \left( \frac{1}{x^2 \sqrt{1 - (\ln(x))^2}} - \frac{\arcsin(\ln(x))}{x^2} \right) dx$$

durch partielle Integration. Wenden Sie hierfür zunächst partielle Integration nur auf den zweiten Summanden an.