# Mathematik B (ET) Sommersemester 2024

10. Übungsblatt (13.06.2024)

---

**Beispiel 10.1.** Überprüfen Sie, ob folgende Differentialgleichungen exakt sind, und lösen Sie diese (falls notwendig) mit Hilfe eines integrierenden Faktors (es genügen implizite Lösungen): **(3 Pkt.)**

(a)
$$y^3 + 3xy^2y' = 0$$

(b)
$$1 + xy - (x^2 + x^3y)y' = 0$$

(c)
$$A(x) + B(y)y' = 0, \quad \text{mit beliebigen Funktionen } A(x),\ B(y)$$

**Beispiel 10.2.** Wir betrachten die Differentialgleichung **(3 Pkt.)**

$$(3y + 4xy^2) + (2x + 3x^2y)y' = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung nicht exakt ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Ansätze für einen integrierenden Faktor auf Seite I-21 im Skript nicht verwendet werden können (d.h., der integrierende Faktor kann keine Funktion nur in der Variablen $x$ oder nur in der Variablen $y$ sein).

(c) Wir setzen als integrierenden Faktor für diese Differentialgleichung die Funktion $\mu(x, y) = x^a y^b$ an. Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{N}$, sodass die Differentialgleichung mit $\mu$ als integrierendem Faktor exakt wird.

**Beispiel 10.3.** Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen **(3 Pkt.)**

(a)
$$y'' + 3y - 10 = 0$$

(b)
$$y^{(4)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0$$

**Beispiel 10.4.** Gegeben sei die folgende Differentialgleichung: **(3 Pkt.)**

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = \cos(x)$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

**Beispiel 10.5.** Die Differentialgleichung **(3 Pkt.)**

$$x^2y'' - xy' - 3y = 2x^3$$

hat für $x > 0$ die allgemeine Lösung $y(x) = c_1x^{-1} + c_2x^3 + \frac{1}{2}x^3 \ln x$.

(a) Überprüfen Sie, dass $y(x)$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Lösungen der homogenen Gleichung ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung bilden.