Mathematik B (ET) Sommersemester 2024

12. Übungsblatt (27.06.2024)

Beispiel 12.1. Wir betrachten das homogene lineare System $\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x)$ von Differentialgleichungen mit **(4 Pkt.)**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Der einzige Eigenwert von A ist $\lambda_1 = 1$ und dieser Eigenwert hat Vielfachheit 3 (dies dürfen Sie ohne Beweis verwenden).

(a) Zeigen Sie, dass der allgemeine Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ von der Form $r\vec{v}_1 + s\vec{v}_2$ mit $(r, s) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist, wobei

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\vec{y}_1(x) = e^{\lambda_1 x}\vec{v}_1$ und $\vec{y}_2(x) = e^{\lambda_1 x}\vec{v}_2$ Lösungen des Systems sind.

(b) Rechnen Sie nach, dass es *keinen* Vektor $\vec{v}$ gibt mit $(A - \lambda_1 I_3)\vec{v} = \vec{v}_1$ oder mit $(A - \lambda_1 I_3)\vec{v} = \vec{v}_2$.

(c) Ermitteln Sie einen Vektor $\vec{v}_3$ mit $(A - \lambda_1 I_3)\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ und rechnen Sie nach, dass $\vec{y}_3(x) = e^{\lambda_1 t}(\vec{v}_3 + x(\vec{v}_1 + \vec{v}_2))$ eine Lösung des Systems ist.

(d) Zeigen Sie anhand der Wronski-Determinante, dass $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$ und $\vec{y}_3$ ein Fundamentalsystem bilden.

Beispiel 12.2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems: **(4 Pkt.)**

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(x) + \begin{pmatrix} e^x \\ 2e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

Beispiel 12.3. Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie kurz Ihre Entscheidung! **(5 Pkt.)**

(a) Jede homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt genau n linear unabhängige Lösungen.

(b) Jede homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung lässt sich in ein System von Differentialgleichungen 1.Ordnung überführen.

(c) Die Menge $\{1, e^{x-1}, e^x\}$ ist ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $y''' - y' = 0$.

(d) Jedes Fundamentalsystem eines linearen Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten ist eindeutig.

(e) Betrachte die Differentialgleichung $y' = \sqrt{y + x}$. Dann besitzt das zugehörige Anfangswertproblem $y(1) = 1$ keine Lösung.