Mathematik B (ET) Sommersemester 2024

4. Übungsblatt (18.04.2024)

Beispiel 4.1. Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve **(3 Pkt.)**

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) - \cos(2t) \\ 2\sin(t) - \sin(2t) \end{pmatrix}$$

im Zeitintervall $[0, \pi/2]$. Hierbei dürfen Sie das Additionstheorem $1 - \cos(x) = 2(\sin(x/2))^2$ benutzen.

Beispiel 4.2. Berechnen Sie die Näherungen des Integrals

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x)}{x}$$

durch

(a) Trapezregel, Simpsonregel und Milne-Regel; **(2 Pkt.)**

(b) Zerlegung von $[0, 2\pi]$ in 2 und in 4 gleichlange Intervalle, dort jeweils Trapezregel. **(2 Pkt.)**

Vergleichen Sie diese Näherungen mit $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x)}{x} \approx 1,41815$.

Beispiel 4.3. **(2 Pkt.)**

(a) Berechnen Sie die Näherung des Integrals

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x$$

durch die Milne-Regel.

(b) Berechnen Sie die Differenz zwischen Ihrer Näherung aus (a) und dem exakten Wert des Integrals. Vergleichen Sie diese Differenz mit der Fehlerschranke, die sich aus der Fehlerformel nach der Milne-Regel ergibt. (Seite F-44 im Skript; $\frac{8}{945} h^7 f^{(6)}(\xi)$)

Beispiel 4.4. Rechnen Sie nach, dass für $m, n \in \mathbb{N}_0$ die in der Vorlesung behauptete Orthogonalitätsrelation gilt: **(2 Pkt.)**

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad m = n = 0, \\ \pi & \text{für} \quad m = n \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad m \neq n. \end{cases}$$

Beispiel 4.5. Wir definieren die Funktion f durch **(4 Pkt.)**

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x < \pi, \\ \pi & \text{für } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

auf $[0, 2\pi]$ und setzen die Funktion $2\pi-$periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort.

(a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen im Intervall $-2\pi < x < 2\pi$.

(b) Entwickeln Sie $f(x)$ als Fourierreihe.

(c) Überprüfen Sie die Fourierreihe auf punktweise Konvergenz und bestimmen Sie in diesem Fall die Grenzfunktion f.