

Mathematik B (ET) Sommersemester 2024

5. Übungsblatt (25.04.2024)

Beispiel 5.1. Überprüfen Sie die folgenden Integrale mithilfe des Vergleichskriteriums auf Konvergenz.

(a)

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\ln(x)^{\ln(x)}} \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + \sqrt{x} + 5} dx$$

(3 Pkt.)

(b)

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x^4 - 1|}}.$$

(3 Pkt.)

Hinweis zu (a): Benutzen Sie $y = \exp(\ln(y))$ mit geeignetem y . Sie dürfen benutzen, dass die Funktion $f(x) = (\ln x)^{-\ln(x)}$ auf $[1, \infty)$ wohl-definiert ist.

Beispiel 5.2. Berechnen Sie die folgenden Integrale, falls sie konvergent sind. Zeigen Sie anderenfalls deren Divergenz.

(a)

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx \quad \text{und} \quad \int_1^{\infty} \frac{\cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$$

(3 Pkt.)

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx \quad \text{und} \quad \int_{-2}^{\infty} \frac{dx}{(x + 3)(x - 1)^2}$$

(3 Pkt.)

Beispiel 5.3. Untersuchen Sie, an welchen Stellen die folgenden Funktionen stetig sind. Hinweis: Polarkoordinaten können bei $g(x, y)$ helfen.

(3 Pkt.)

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 5.4. Berechnen Sie die Richtungsableitungen der Funktion

(2 Pkt.)

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{x^4 y}{2x^4 - y^4} & \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt $(0, 0)$ in eine allgemeine Richtung $\vec{v} = (a, b)$ mit $\|\vec{v}\| = 1$. Für welche Richtungen existiert die Richtungsableitung im Nullpunkt nicht?

Beispiel 5.5. Berechnen Sie den Gradienten und die Richtungsableitung der Funktion (2 Pkt.)

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

im Punkt $\vec{a} = (1, 0)$ in die Richtung

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In welche Richtungen ist die Richtungsableitung von f in \vec{a} maximal, minimal, bzw. Null?