

Mathematik B (ET) Sommersemester 2024

6. Übungsblatt (02.05.2024)

Beispiel 6.1. Gegeben ist die Funktion

(3 Pkt.)

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{xy(2x^2+3y^2)}{x^2+y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass $f(x, y)$ in \mathbb{R}^2 stetig ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $f_x(0, 0)$ und $f_y(0, 0)$ existieren und geben Sie ihre Werte an.
- (c) Zeigen Sie, dass $f(x, y)$ in $(0, 0)$ total differenzierbar ist.

Beispiel 6.2. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

(4 Pkt.)

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass $f(x, y)$ in \mathbb{R}^2 stetig ist.
- (b) Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen $\partial_{\vec{v}}f(0, 0)$ existieren.
- (c) Zeigen Sie mithilfe der Definition der totalen Differenzierbarkeit, dass f in $(0, 0)$ nicht total differenzierbar ist.

Hinweis: Wählen Sie als \vec{k} den Gradienten von f im Punkt $(0, 0)$ und finden Sie einen Weg, bei dem der Grenzwert $\neq 0$ ist.

- (d) Untersuchen Sie die Stetigkeit der partiellen Ableitungen im Nullpunkt.

Beispiel 6.3. Bestimmen Sie die Ebenengleichung der Tangentialebene der Fläche

(2 Pkt.)

$$z = f(x, y) := y \ln(x^2 - 3y)$$

in einem allgemeinen Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Spezialisieren Sie die Gleichung dann für den Punkt $(2, 1, f(2, 1))$.

Beispiel 6.4. Sei

(2 Pkt.)

$$f(x, y, z) = \frac{z^2}{3 + x + y}.$$

Ermitteln Sie die Steigung von f entlang der parametrischen Kurve $\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, e^t)$, in der Richtung von wachsendem t . Begründen Sie, ob f entlang der Kurve steigt, oder fällt.

Hinweis: Wenden Sie den Satz auf Seite G-18 an. Zeigen Sie also, dass f total differenzierbar ist und dass die Komponentenfunktionen der Kurve auch differenzierbar sind.

Beispiel 6.5. Sei

(2 Pkt.)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - x.$$

gegeben. Kann es so eine Funktion f geben?