

Mathematik B (ET) Sommersemester 2024

8. Übungsblatt (23.05.2024)

Beispiel 8.1. Berechnen Sie $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v})$ sowie $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v})$ für $\vec{v} = (x^3yz, xy^3z, xyz^3)$. (2 Pkt.)

Beispiel 8.2. Zu einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir das Vektorfeld (2 Pkt.)

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz + ax^2 \\ xz - a^2z \\ xy - 4y - az^2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Rotation und die Divergenz von $\vec{V}$. Für welche Werte von a ist das Feld wirbelfrei? Wo liegen (je nach Wert von a) die Quellen und die Senken des Feldes?

Beispiel 8.3. Berechnen Sie die Flächen bzw. Volumina der folgenden Mengen: (3 Pkt.)

(a) $F = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 4, \frac{1}{y} \leq x \leq \sqrt{y}\}$

(b) $K_1 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \frac{y}{x+1}\}$

Beispiel 8.4. Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int \int_B f(x, y) dx dy$ für die Funktionen f und Bereiche B : (4 Pkt.)

(a) $f(x, y) = 3x^2 \cos(2y) + 2ye^{x+1}$, und $B = [-2, 3] \times [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

(b) $f(x, y) = 2x + y^3$, und B ist der von $y = x$, $y = \sqrt{2x}$, $x = 0$ und $x = 2$ begrenzte Bereich.

(c) $f(x, y) = e^{-x^2}$, und B ist das Dreieck mit den Eckpunkten $(1, 0)$, $(1, 2)$ und $(0, 2)$.

Beispiel 8.5. Die Funktion $f(x, y) = 8xy$ sei über dem Bereich B gegeben, der durch $y \geq x^2$, $y \leq 8 - x^2$ und $y \leq x + 6$ definiert ist. (3 Pkt.)

(a) Skizzieren Sie den Bereich B .

(b) Integrieren Sie f über B .

Beispiel 8.6. Berechnen Sie für $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ und $B = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ das Integral $\int \int_B f(x, y) dy dx$ mit Hilfe von Polarkoordinaten. (2 Pkt.)

Beispiel 8.7. Bestimmen Sie mittels der Variablentransformation $u = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ und $v = \frac{x}{y}$ den Flächeninhalt der Fläche, die im 1. Quadranten ($x > 0$, $y > 0$) von den Kurven $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$, $x = 4y$ und $x = 25y$ begrenzt wird. (3 Pkt.)