

Mathematik B (ET) Sommersemester 2024

9. Übungsblatt (06.06.2024)

Beispiel 9.1. Gegeben ist die Funktion

(2 Pkt.)

$$f(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4.$$

Mit C bezeichnen wir den Kreis vom Radius 1 um den Nullpunkt, durchlaufen in der Standardparametrisierung $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$ von f in einem allgemeinen Punkt auf C , wobei $\vec{n}$ der nach außen gerichtete Normalvektor von C ist. Zeigen Sie anschließend mit Hilfe der Greenschen Formeln, dass

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds = 0.$$

Beispiel 9.2. Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems

(2 Pkt.)

$$y' \tan(y) = x \cos(y)^2, \quad y(0) = \frac{2\pi}{3}.$$

Beispiel 9.3. Lösen Sie das Anfangswertproblem

(3 Pkt.)

$$y' = x^3 y^2 - 3 \frac{y}{x}, \quad y(1) = -\frac{1}{2}$$

für $x > 0$ mit Hilfe der Substitution $z(x) = x^3 y(x)$.

Beispiel 9.4. Lösen Sie das Anfangswertproblem

(3 Pkt.)

$$y = xy' - \sqrt{x^2 - y^2}, \quad y(1) = 1$$

für $x > 0$ mit Hilfe der Substitution $z(x) = \frac{y(x)}{x}$.

Beispiel 9.5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösungen der Differentialgleichungen

(3 Pkt.)

$$\cos(x)y' - \sin(x)y = 4x \quad \text{und} \quad \cos(x)y' - \sin(x)y = \sin(x),$$

jeweils mit $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Beispiel 9.6. Ermitteln Sie alle Lösungen der Bernoullischen Differentialgleichung

(3 Pkt.)

$$xy' - 4y = x^2 y^3$$

für $x > 0$. Bestimmen Sie anschließend

- den Definitionsbereich der allgemeinen Lösung,
- diejenigen Lösungen mit $y(1) = 1$, $y(1) = 0$ und $y(1) = -\frac{1}{2}$.

Beispiel 9.7. Ermitteln Sie für die Riccatische Differentialgleichung

(2 Pkt.)

$$y' + (2e^{4x} - 3)y + (1 - e^x)y^2 = 4e^{6x}$$

eine Lösung und formen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe dieser Lösung in eine Bernoullische Differentialgleichung um.

Hinweis: Standardansätze sind $y = \alpha x^\beta$, $y = \alpha e^{\beta x}$ oder $y = \alpha_1 x^{\beta_1} + \alpha_2 x^{\beta_2}$.