Mathematatik B (EEE) SS 2025

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

1. Übungsblatt (13.03.2025)

Beispiel 1.1. Berechnen Sie Ober- und Untersummen **(4 Pkt.)**

(a) von $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ bezüglich der Zerlegung $Z = \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \pi\}$;

(b) von $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 6x^2 + 2x$ bezüglich der äquidistanten Zerlegung $Z_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[0,1]$ für allgemeines $n \in \mathbb{N}$. Wie groß muss n gewählt werden, damit $O(Z_n, g) - U(Z_n, g) < \frac{1}{1000}$ gilt?

Hinweis: Äquidistant bedeutet, dass die Abstände $x_{i+1} - x_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gleich groß sind. Das heißt in diesem Fall: $x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$. Weiters können Sie die Formeln $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ und $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ohne Beweis verwenden.

Beispiel 1.2. Berechnen Sie das Integral **(2 Pkt.)**

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} |\sin(x)|\, dx$$

und vergleichen Sie das Ergebnis mit

$$\left| \int_{-2\pi}^{2\pi} \sin(x)\, dx \right|.$$

Beispiel 1.3. Gegeben ist die Funktion **(2 Pkt.)**

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor,$$

wobei $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$. Zeigen Sie, dass f auf jedem Intervall (a, b) integrierbar ist und berechnen Sie das Integral

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx.$$

Beispiel 1.4. Berechnen Sie die folgenden Integrale durch partielle Integration: **(3 Pkt.)**

(a) $\displaystyle\int (4x + x^2) \cos(2x)\, dx$

(b) $\displaystyle\int \ln(1 + x)\, dx$

(c) $\displaystyle\int (\ln(x))^2\, dx$

Beispiel 1.5. Bestimmen Sie das folgende Integral: **(3 Pkt.)**

$$\int \cos(4x - 1) e^{x+2}\, dx$$

Beispiel 1.6. Sei $n \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl. Bestimmen Sie das Integral **(2 Pkt.)**

$$\int x^n \ln x\, dx.$$

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $n \neq -1$ und $n = -1$.