
Mathematik B (EEE) SS 2025

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

4. Übungsblatt (03.04.2025)

Beispiel 4.1. Sei $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass die Bogenlänge der Kurve

(3 Pkt.)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \alpha \cos(t)(1 - \cos(t)) \\ \alpha \sin(t)(1 - \cos(t)) \end{pmatrix}$$

im Intervall $[0, 2\pi]$ gleich 8α ist.

Hinweis: Verwenden Sie beim Integrieren die Formel für den Kosinus von Doppelwinkeln und die Summenformel für den Kosinus.

Beispiel 4.2. Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve

(2 Pkt.)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \frac{8}{3}t^{3/2} \\ 4t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0,$$

im Intervall $[0, T]$ für beliebiges $T \geq 0$.

Beispiel 4.3. Wir modellieren einen American Football durch Rotation der Funktion $f(x) = 1 - \frac{x^2}{9}$ auf dem Intervall $[-3, 3]$ um die x -Achse. Wie groß ist sein Volumen?

(2 Pkt.)

Beispiel 4.4. Bestimmen Sie eine Formel für das Volumen eines Torus, der durch die Rotation einer Kreisscheibe mit Radius r um die y -Achse im Abstand R vom Mittelpunkt erzeugt wird.

(3 Pkt.)

Beispiel 4.5. Wir definieren die Funktion f durch

(4 Pkt.)

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi, \\ \cos(x) & \text{für } \frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

auf $[0, 2\pi]$ und setzen die Funktion 2π -periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort.

(a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

(b) Entwickeln Sie $f(x)$ als Fourierreihe.

Hinweis: Sie können die folgende Formel ohne Beweis verwenden:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right)$$

Beispiel 4.6. Zeigen Sie, dass für $m, n \in \mathbb{N}_0$ folgende Orthogonalitätsrelation gilt:

(2 Pkt.)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m = n = 0, \\ \pi & \text{für } m = n \neq 0, \\ 0 & \text{für } m \neq n. \end{cases}$$