

---

# Mathematik B (EEE) SS 2025

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

## 5. Übungsblatt (10.04.2025)

---

**Beispiel 5.1.** Wir definieren die Funktion  $f$  durch

(3 Pkt.)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0, \\ \frac{\pi}{2} - x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

auf  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  und setzen die Funktion  $\pi$ -periodisch auf ganz  $\mathbb{R}$  fort.

- (a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.
- (b) Entwickeln Sie  $f(x)$  als Fourierreihe.

**Beispiel 5.2.** Berechnen Sie die Näherungen des Integrals

(3 Pkt.)

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

durch die

- (a) Trapezregel, Simpsonregel,  $\frac{3}{8}$ -Regel und Milne-Regel;
- (b) Zerlegung von  $[0, 1]$  in 2, in 4 und in 6 gleich lange Intervalle auf denen Sie jeweils die Trapezregel verwenden.

Vergleichen Sie diese Näherungen mit  $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,746824$ .

**Beispiel 5.3.**

(2 Pkt.)

- (a) Berechnen Sie die Näherung des Integrals

$$\int_0^\pi \sin(x) dx$$

durch die Milne-Regel.

- (b) Berechnen Sie die Differenz

$$E = \left| \int_a^b f(x) dx - (b-a) \sum_{k=0}^n \alpha_k f(x_k) \right|$$

zwischen Ihrer Näherung aus (a) und dem exakten Wert des Integrals. Vergleichen Sie diese Differenz mit der Fehlerschranke der Milne-Regel, gegeben durch  $E \leq \frac{8}{945} \left(\frac{b-a}{4}\right)^7 |f^{(6)}(\xi)|$  für ein  $\xi \in [a, b]$ .

*Hinweis: Schätzen sie  $|f^{(6)}(\xi)|$  nach oben ab.*

**Beispiel 5.4.** Bestimmen Sie das folgende Integral:

(3 Pkt.)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx.$$

*Hinweis: Verwenden Sie die Substitution  $u = \sqrt{x-1}$  und beachten Sie, dass das Integral an beiden Grenzen uneigentlich ist.*

**Beispiel 5.5.** Bestimmen Sie alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  für die das folgende Integral konvergiert:

(3 Pkt.)

$$\int_1^{\infty} \frac{\alpha}{z} - \frac{1+3z^2}{z+z^3} dz.$$

**Beispiel 5.6.** Berechnen Sie die folgenden Integrale, falls sie konvergent sind. Zeigen Sie anderenfalls deren Divergenz.

(3 Pkt.)

(a)  $\int_0^1 \ln(x) dx$

(b)  $\int_{-1}^4 \frac{x}{x^2-9} dx$