
Mathematik B (EEE) SS 2025

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

7. Übungsblatt (15.05.2025)

Beispiel 7.1. Gegeben ist die Funktion

(3 Pkt.)

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{xy(3x^2+4y^2)}{x^2+y^2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass $f(x, y)$ in $\mathbb{R}^2$ stetig ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $f_x(0, 0)$ und $f_y(0, 0)$ existieren und geben Sie ihre Werte an.
- (c) Zeigen Sie, dass der Gradient $\nabla f(x, y)$ bei $(0, 0)$ stetig und damit $f(x, y)$ in $(0, 0)$ total differenzierbar ist.

Beispiel 7.2. Bestimmen Sie die Ebenengleichung der Tangentialebene der Fläche

(2 Pkt.)

$$f(x, y) = x^4 + 2x^2y - y^2 + \sin(xy)^2$$

in einem allgemeinen Entwicklungspunkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Bestimmen Sie die Gleichung dann im Punkt $(0, 1, f(0, 1))$.

Beispiel 7.3. Für eine stetige differenzierbare Funktion $f(x, y, z)$ betrachten wir die zugehörige Funktion in Kugelkoordinaten definiert als

(2 Pkt.)

$$F(r, \varphi, \vartheta) = f(r \cos(\varphi) \sin(\vartheta), r \sin(\varphi) \sin(\vartheta), r \cos(\vartheta)).$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die partiellen Ableitungen F_r , F_φ und F_ϑ in Abhängigkeit von f_x , f_y und f_z .

Beispiel 7.4. Seien u und v Funktionen von x, y , das heißt $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$, gegeben durch das System

(3 Pkt.)

$$\begin{cases} 1 = xu + yv, \\ 1 = x + y + u + v. \end{cases}$$

Bestimmen Sie u_x, u_y, v_x, v_y durch die Anwendung impliziter Ableitungen. (Hinweis: Berechnen Sie zunächst die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}$ der beiden Gleichungen und lösen Sie das Gleichungssystem nach u_x und v_x . Wiederholen Sie dies anschließend für $\frac{\partial}{\partial y}$. Teilantwort: $u_x = \frac{y-u}{x-y}$.)

Beispiel 7.5. Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung der Funktion

(2 Pkt.)

$$f(x, y, z) = 4(1 + y^2)\sqrt{2x^2 - z}$$

im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 0, 1)$.

Beispiel 7.6. Berechnen Sie alle stationären Punkte der folgenden Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und bestimmen Sie deren Typ (lokales Minimum, lokales Maximum oder Sattelpunkt).

(3 Pkt.)

$$f(x, y) = (x^2 - 3y^2)e^{2x-y^2}$$