Mathematik B (EEE) SS 2025

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

9. Übungsblatt (05.06.2025)

Beispiel 9.1. Sei A der durch die Geraden $x+y=2$, $x+y=4$, $y=3x$ und $y=11x$ begrenzte Bereich. **(3 Pkt.)**

(a) Zeichnen Sie den Bereich A in der xy-Ebene.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Variablentransformation

$$u = x+y, \qquad v = \frac{y}{x}$$

den Wert des Doppelintegrals

$$\iint_A (x+y)\,dxdy.$$

Beispiel 9.2. Berechnen Sie das Doppelintegral **(3 Pkt.)**

$$\iint_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 dxdy,$$

wobei $a, b > 0$ und

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

(Hinweis: Verwenden Sie die verallgemeinerten Polarkoordinaten: $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$.)

Beispiel 9.3. Berechnen Sie das Volumen des durch $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$, $z^2 \geq x^2+y^2$ und $z \geq 0$ definierten Körpers. **(3 Pkt.)**
(Hinweis: Berechnen Sie das Dreifachintegral $\iiint_B 1\,dxdydz$ und verwenden Sie Kugel- oder Zylinderkoordinaten.)

Beispiel 9.4. Berechnen Sie das Kurvenintegral **(3 Pkt.)**

$$\int_C x\,ds,$$

wobei C die Zykloide $\vec{x}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$, ist.
(Hinweis: Bei den Berechnungen können Sie die Identität $1 - \cos(t) = 2\sin^2(\frac{t}{2})$ ohne Beweis verwenden.)

Beispiel 9.5. Berechnen Sie die Arbeit W der Kraft (Vektorfeld) **(3 Pkt.)**

$$\vec{F}(x,y,z) = (x, y, x+y-1)$$

entlang der Geraden zwischen den Punkten $(1,1,1)$ und $(2,3,4)$, das heißt berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \vec{F}\,d\vec{s} := \int_a^b \langle \vec{F}(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t)\rangle\,dt.$$

Beispiel 9.6. Gegeben sei die Funktion **(3 Pkt.)**

$$f(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4.$$

Mit C bezeichnen wir den Kreis vom Radius 1 um den Nullpunkt, durchlaufen in der Standardparametrisierung $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \langle \nabla f, \vec{n} \rangle$$

von f in einem allgemeinen Punkt auf C, wobei $\vec{n}$ der nach außen gerichtete Normalvektor von C ist. Zeigen Sie anschließend

(a) direkt anhand der Definition von Kurvenintegralen,

(b) mit Hilfe des Satzes von Gauß (verwenden Sie $\vec{F} = \nabla f$ als Vektorfeld),

dass

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \, ds = 0.$$

(Hinweis: In (a) können Sie ohne Beweis das folgende Resultat verwenden: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^{2\pi} (\cos(x))^{2n} \, dx = \binom{2n}{n} \frac{2\pi}{4^n}.$$

Zum Beweis siehe Aufgabe 2.2.)