

Aufgabe 23. Es gibt zwei Standards der *Internationale Standardbuchnummer*.

- (1) Die alte ISBN-10 hat 10 Ziffern, $x_1x_2x_3 \cdots x_{10}$, mit $x_1, x_2, \dots, x_9 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ und $x_{10} \in \{0, 1, \dots, 9\} \cup \{X\}$, wobei das Symbol X für den Wert 10 steht und die letzte Ziffer x_{10} eine Prüfziffer ist, sodaß

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 9x_9 + 10x_{10} \equiv 0 \pmod{11}$$

- (2) Die neue ISBN-13 hat 13 Ziffern, $z_1z_2z_3z_4 \cdots z_{13}$, wobei $z_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ und der Präfix $z_1z_2z_3$ entweder 978 oder 979 ist und die letzte Ziffer z_{13} eine Prüfziffer ist, sodaß

$$z_1 + 3z_2 + z_3 + 3z_4 + \cdots + z_{11} + 3z_{12} + z_{13} \equiv 0 \pmod{10}.$$

- (a) Berechne die Prüfziffern der folgenden unvollständigen ISBN

$$\begin{array}{c} 310403060 \\ 978-0-676-97800 \end{array}$$

- (b) Erkläre, warum auch die Regel

$$10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + \cdots + 2x_9 + x_{10} \equiv 0 \pmod{11}$$

für die Überprüfung einer ISBN-10 verwendet werden kann.

- (c) Begründe, daß die Prüfziffer einer ISBN-10 nach einem Eingabefehler (d.h., eine Ziffer falsch oder 2 benachbarte Ziffern vertauscht) nicht mehr korrekt ist.
 (d) Gilt das auch für ISBN-13?

Aufgabe 24. Berechne $2^{15} \pmod{3465}$.

Hinweis:

- (1) 3465 in Primfaktoren $p_i^{k_i}$ zerlegen.
- (2) $2^{15} \pmod{p_i^{k_i}}$ für alle Primfaktoren berechnen.
- (3) Die Lösung mit dem chinesischen Restsatz ermitteln.

Aufgabe 25. Welche der folgenden Strukturen (X, \circ) bilden Halbgruppen, Monoiden, Gruppen? In welchen gilt das Kommutativgesetz? Bestimme ggf. das neutrale Element, die invertierbaren Elemente und die jeweiligen Inversen.

- (a) (\mathbb{Q}, \circ) mit $x \circ y = x + 2y$
- (b) (\mathbb{N}, \circ) mit $x \circ y = \max(x, y)$.
- (c) (\mathbb{N}, \circ) mit $x \circ y = \min(x, y)$.
- (d) (\mathbb{N}_0, \circ) mit $x \circ y = |x - y|$.
- (e) $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$ mit $x \circ y = x + y + xy$.
- (f) Sei U eine Menge, und $X = \{A : A \subseteq U\}$ die Potenzmenge ausgestattet mit der Verknüpfung

$$A \circ B = A \cup B$$

- (g) X wie vorher mit der Verknüpfung

$$A \circ B = A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- (h) X beliebig mit der Verknüpfung

$$a \circ b = a$$

für alle $a, b \in X$.