

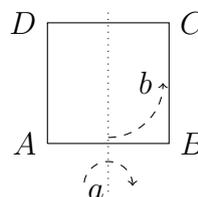
Aufgabe 26. Ergänze die folgende Verknüpfungstabelle so, daß die Gruppenaxiome erfüllt sind. Welches ist das neutrale Element? Ist die Gruppe abelsch?

\circ	a	b	c	d
a		d	a	b
b	d	c		
c	a	b		d
d			d	

Es kann die Tatsache verwendet werden, daß genau eine Lösung existiert.

Aufgabe 27. Wir betrachten das Quadrat $ABCD$ und seine Symmetrien. Wir bezeichnen mit a und b die Transformationen

$$\begin{array}{ll}
 a : A \mapsto B & b : A \mapsto B \\
 B \mapsto A & B \mapsto C \\
 C \mapsto D & C \mapsto D \\
 D \mapsto C & D \mapsto A
 \end{array}$$



- (a) Zeige, daß $b \circ a = a \circ b^3$.
- (b) Stelle alle Transformationen des Quadrats in der Form $a^m \circ b^n$ dar.
- (c) Erstelle die Verknüpfungstabelle.
- (d) Bestimme die Linksnebenklassen der Untergruppe $\{e, a\}$.

Aufgabe 28. Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e . Die Ordnung eines Elements $x \in G$ ist definiert als $o(x) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x^n = e\}$.

- (a) Bestimme alle Elemente der Gruppe (bezüglich Multiplikation) $\mathbb{G}_{30} = \{[k] \in \mathbb{Z}_{30} \mid \text{ggT}(k, 30) = 1\}$.
- (b) Bestimme für jedes Element $x \in \mathbb{G}_{30}$ die Ordnung $o(x)$.

Aufgabe 29. Berechne $\varphi(3465)$ und $\varphi(10125000)$.

Aufgabe 30. Ermittle ohne Taschenrechner Zahlen a, b, c , sodaß

$$(4^{27})^{2021} \equiv a \pmod{25} \quad 2^{(2^{32})} \equiv b \pmod{11} \quad 14^{(2021^{2021})} \equiv c \pmod{60}.$$

Hinweis: Sollte der Satz von Euler-Fermat nicht direkt anwendbar sein, den chinesischen Restsatz wie in Aufgabe 24 anwenden!