Aufgabe 57. Seien $k \leq m \leq n$ natürliche Zahlen. Zeige durch eine kombinatorische Überlegung (d.h., ohne die Binomialkoeffizienten auszurechnen), dass

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

Aufgabe 58. Wieviele ganzzahlige Lösungen hat die Gleichung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

unter der Voraussetzung

(a) $x_j > 0$

(b) $x_j \geq 0$

Wie hängen die Lösungen zusammen?

Aufgabe 59. Zeige mit Hilfe der Binomialreihe (C.2.6), dass für $n \in \mathbb{N}$ die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} x^k$$

gilt.

Aufgabe 60. Berechne Formeln für die Koeffizienten a_n und b_n der Potenzreihen

(a)
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{-13\,x^2 + x + 2}{6\,x^3 + x^2 - 4\,x + 1}$$

(b)
$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \frac{-8\,x^2 + 14\,x - 7}{4\,x^3 - 8\,x^2 + 5\,x - 1}$$

Hinweis zu (b): Skriptum C.2.15.

Aufgabe 61. Bestimme einen geschlossenen Ausdruck für Zähler und Nenner der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{k-0}^{\infty} a_k x^k,$$

deren Koeffizienten die Rekursionsgleichung

$$a_{n+2} - 2\,a_{n+1} - 8\,a_n = (n+1)\,2^n, \quad n \geq 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 1$$

erfüllen.