

Diskrete Mathematik für Informatikstudien Sommersemester 2022

10. Übungsblatt (24.5.2022)

Beispiel 10.1. Zeigen Sie, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq 2n$

$$\binom{2n}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \binom{n}{m-k}$$

gilt, indem Sie die Reihenentwicklungen von $(1+z)^{2n}$ und $(1+z)^n(1+z)^n$ vergleichen. Folgern Sie daraus, dass insbesondere

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

Beispiel 10.2. In einer Urne befinden sich jeweils 6 schwarze, weiße, rote und grüne Kugeln. Hieraus sollen Kugeln entnommen werden, wobei darunter

- (i) mindestens zwei schwarze Kugeln,
- (ii) eine ungerade Anzahl weißer Kugeln,
- (iii) eine durch 3 teilbare Zahl roter Kugeln und
- (iv) höchstens zwei grüne Kugeln

sein sollen. Mit $S(z)$ bezeichnen wir die formale Potenzreihe mit

$$[z^n]S(z) = \begin{cases} 1 & \text{falls Regel (i) erlaubt, genau } n \text{ schwarze Kugeln zu nehmen,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog definieren wir $W(z)$ für die weißen Kugeln (Regel (ii)), $R(z)$ für die roten Kugeln (Regel (iii)) und $G(z)$ für die grünen Kugeln (Regel (iv)). Verwenden Sie diese vier Funktionen, um die Anzahl der Möglichkeiten zur Auswahl von genau 8 Kugeln aus der Urne zu berechnen, wobei die Regeln (i)–(iv) eingehalten werden sollen.

Bemerkung: Die Reihenfolge der Kugeln soll keine Rolle spielen.

Beispiel 10.3. Zeigen Sie, dass

$$z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = z \frac{1 - z^6}{1 - z}$$

gilt. Wir nennen diese Funktion $W(z)$. Berechnen Sie unter Verwendung von $W(z)$, wie viele Möglichkeiten es gibt, beim fünfmaligen Werfen eines sechsseitigen Würfels eine Summe von 24 zu erreichen.

Beispiel 10.4. Bestimmen Sie mit Hilfe erzeugender Funktionen einen expliziten Ausdruck für die Folgenglieder a_n der Folge

$$a_0 = 9, \quad a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 9 \cdot 2^n \quad \text{für } n \geq 2.$$

Beispiel 10.5. Bestimmen Sie mit Hilfe erzeugender Funktionen einen expliziten Ausdruck für die Folgenglieder a_n der Folge

$$a_0 = 9 \quad \text{und} \quad a_n - 2a_{n-1} = (-1)^n 9(n+1) \quad \text{für } n \geq 1.$$