Diskrete Mathematik für Informatikstudien
Sommersemester 2022

11. Übungsblatt (31.5.2022)

Beispiel 11.1. Man nennt zwei Graphen G_1, G_2 *isomorph* (und schreibt $G_1 \simeq G_2$), falls es eine bijektive Abbildung $\varphi\colon V(G_1) \to V(G_2)$ gibt mit $E(G_2) = \{\{\varphi(x), \varphi(y)\} \mid \{x, y\} \in E(G_1)\}$ (in Worten: zwei Knoten sind genau dann in G_1 durch eine Kante verbunden, wenn ihre Bilder in G_2 durch eine Kante verbunden sind). Auf der letzten Seite dieses Übungsblattes befinden sich Zeichnungen von sechs Graphen.

(a) Teilen Sie diese Graphen auf drei Paare (G_1, G_2), (G_3, G_4) und (G_5, G_6) auf, sodass $G_1 \simeq G_2$, $G_3 \simeq G_4$ und $G_5 \simeq G_6$. Geben Sie die dazugehörigen bijektiven Abbildungen $V(G_1) \to V(G_2)$, $V(G_3) \to V(G_4)$ und $V(G_5) \to V(G_6)$ an.

(b) Begründen Sie, warum die Graphen aus verschiedenen Paaren *nicht* isomorph sind.

Hinweis: Halten Sie nach möglichst einfachen Eigenschaften Ausschau, die die Graphen in verschiedenen Paaren voneinander unterscheiden. Zum Beispiel kann ein Graph G, der einen Kreis der Länge 4 enthält, nicht isomorph zu einem Graphen H sein, der keinen solchen Kreis enthält.

Beispiel 11.2. Zeigen Sie, dass in jedem ungerichteten Graphen G die Relation

$$xRy \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \text{ Weg in } G \text{ von } x \text{ nach } y$$

eine Äquivalenzrelation auf $V(G)$ ist. Geben Sie außerdem einen gerichteten Graphen D an, in dem die Relation

$$x\vec{R}y \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \text{ gerichteter Weg in } D \text{ von } x \text{ nach } y$$

keine Äquivalenzrelation auf $V(D)$ ist. Weisen Sie dies auch nach (d.h. zeigen Sie, dass mindestens eine der Eigenschaften für eine Äquivalenzrelation nicht erfüllt ist).

Beispiel 11.3. In einem gegebenen Graphen $G = (V, E)$ ist der *Abstand* zwischen zwei Knoten x, y, bezeichnet als $d(x, y)$, die Länge des kürzesten Weges in G von x nach y. Der *Durchmesser* von G ist der Wert $\operatorname{diam}(G) := \max_{x,y \in V}(d(x, y))$. Zeigen Sie

(a) $d(x, x) = 0$ für jedes $x \in V$.

(b) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in V$.

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ für alle $x, y, z \in V$.

(d) Für jedes $z \in V$ gibt es (mindestens) ein $x \in V$ mit $d(x, z) \geq \frac{1}{2} \operatorname{diam}(G)$.

Beispiel 11.4. Gegeben ist ein Graph $G = (V, E)$ und ein Knoten $x \in V$. Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir die Menge

$$D_i := \{y \in V \mid d(x, y) = i\}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $i \geq 1$ gilt:

(a) Ist $y \in D_i$ und $\{y, z\} \in E$, dann ist $z \in D_{i-1} \cup D_i \cup D_{i+1}$.

(b) Jeder Knoten in D_i hat mindestens einen Nachbarn in D_{i-1}.

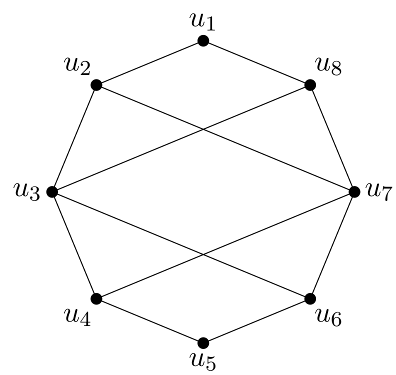
(c) $|D_i| \leq \Delta(G)(\Delta(G) - 1)^{i-1}$. (Erinnerung: $\Delta(G)$ ist der Maximalgrad von G.)

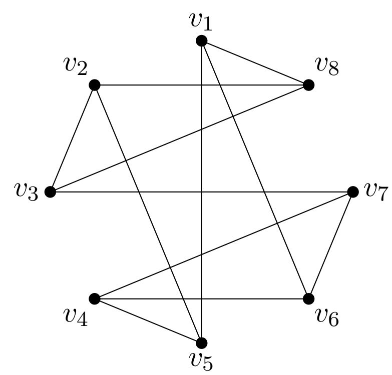
Beispiel 11.5. Wir betrachten den gerichteten Graphen D mit Knotenmenge $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ und Kantenmenge

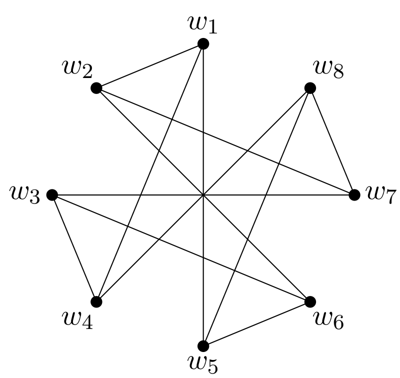
$$\big\{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_1), (v_3, v_2), (v_4, v_3)\big\}.$$

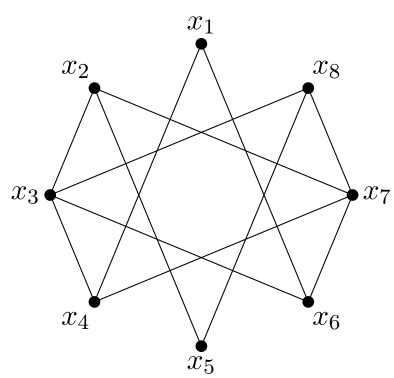
(Hierbei bezeichnet die Schreibweise (x, y) eine gerichtete Kante von x nach y, d.h. mit Anfangsknoten x und Endknoten y.)

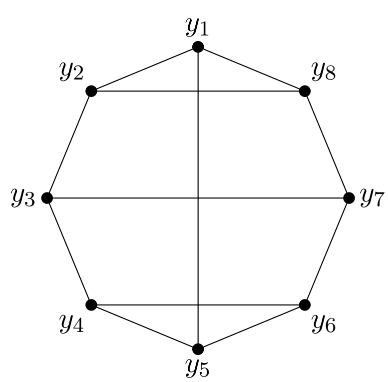
Zeichnen Sie den Graphen und stellen Sie seine Adjazenzmatrix auf. Berechnen Sie anschließend für alle Knoten x, y von D die Anzahl der gerichteten Wege der Länge 8 von x nach y.

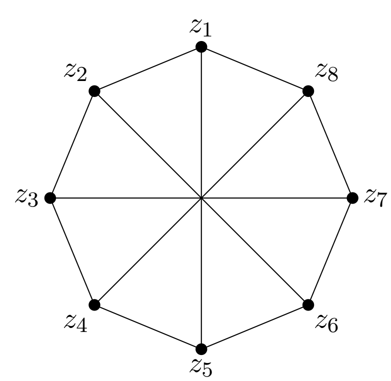

u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 u_7 u_8


v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8


w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 w_6 w_7 w_8


x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8


y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 y_7 y_8


z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8