Diskrete Mathematik für Informatikstudien
Sommersemester 2022

13. Übungsblatt (21.6.2022)

Beispiel 13.1. Im bipartiten Graphen G mit Seiten $A = \{a_1, \dots, a_5\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_5\}$ und Kantenmenge

$$\big\{\{a_1, b_2\}, \{a_1, b_4\}, \{a_2, b_2\}, \{a_2, b_4\}, \{a_3, b_3\}, \{a_3, b_4\}, \{a_3, b_5\}, \\ \{a_4, b_1\}, \{a_4, b_2\}, \{a_4, b_3\}, \{a_4, b_4\}, \{a_4, b_5\}, \{a_5, b_2\}, \{a_5, b_4\}\big\}$$

ist das Matching $M = \big\{\{a_2, b_2\}, \{a_3, b_3\}, \{a_4, b_4\}\big\}$ gegeben. Finden Sie einen augmentierenden Pfad P durch Anwendung von BFS. Wenden Sie dabei die folgende Regel an: Stehen in einem Schritt mehrere Knoten zur Auswahl, wähle zuerst den Knoten mit kleinstem Index.

Welche Kanten liegen im Matching $M' = M \triangle E(P)$ (symmetrische Differenz)? Ist M' ein größtmögliches Matching in G?

Beispiel 13.2. Wir betrachten den bipartiten Graphen G mit Seiten $A = \{a_1, \dots, a_5\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_5\}$ und Kantenmenge $\big\{\{a_i, b_j\} \mid i, j \in \{1, \dots, 5\} \wedge i \neq j\big\}$. Ermitteln Sie durch den Greedy-Algorithmus eine Färbung von G, wobei Sie die Knoten in der Reihenfolge $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_5, b_5$ betrachten. Begründen Sie in jedem Schritt des Algorithmus, warum für den jeweiligen Knoten die behauptete Farbe gewählt werden muss.

Vertauschen Sie in der oben genannten Reihenfolge der Knoten die Positionen von a_3 und b_2 (und lassen die Reihenfolge ansonsten unverändert) und führen Sie den Greedy-Algorithmus erneut durch, inklusive der Beschreibung der Schritte wie im ersten Durchgang.

Beispiel 13.3. In Anwendungen gibt es oft zusätzliche Einschränkungen, welche Farben für die einzelnen Knoten verwendet werden dürfen. Wir nehmen an, dass im Graphen $G = (V, E)$ jeder Knoten v eine Liste S_v erlaubter Farben besitzt. Eine Färbung $c\colon V \to \mathbb{N}$ von G (d.h. für alle $\{x, y\} \in E$ gilt $c(x) \neq c(y)$) nennen wir *Färbung aus den gegebenen Listen,* falls $c(v) \in S_v$ für jeden Knoten v gilt.

Der Greedy-Algorithmus lässt sich auch auf Färbungen aus Listen anwenden, indem man folgende Änderung vornimmt: Soll im Algorithmus ein Knoten v gefärbt werden (und einige andere Knoten sind ggf. bereits gefärbt), dann wählt man für v die kleinste Farbe aus S_v, die noch nicht von einem Nachbarn von v verwendet wird. Werden bereits alle Farben aus S_v von Nachbarn von v verwendet, dann endet der Algorithmus, ohne eine Färbung zu finden.

Wir betrachten den vollständig bipartiten Graphen G mit Seiten $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ und $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ und Kantenmenge $\big\{\{a_i, b_j\} \mid i, j \in \{1, 2, 3\}\big\}$.

(a) Gegeben sind die Listen $S_{a_i} = S_{b_i} = \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$. Zeigen Sie, dass G dann keine Färbung aus den gegebenen Listen besitzt.

(b) Gegeben sind die Listen $S_{a_1} = S_{b_1} = \{1, 2, 3\}$, $S_{a_2} = S_{b_2} = \{2, 3, 4\}$ und $S_{a_3} = S_{b_3} = \{3, 4, 5\}$. Rechnen Sie nach, dass in der Reihenfolge $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ der Knoten die obige Variante des Greedy-Algorithmus *keine* Färbung findet.

(c) Geben Sie eine Färbung aus den Listen aus Teil (b) an.

Beispiel 13.4. Ist der Graph G mit Knotenmenge $\{v_1, \ldots, v_6\}$ und Kantenmenge

$$\big\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_3\},\\ \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_6\}\big\}$$

planar?

- Falls G planar ist: Zeichnen Sie G ohne Überkreuzen von Kanten in die Ebene. Kann man noch Kanten zu G hinzufügen, so dass der Graph planar bleibt? Wenn ja, welche? Wenn nein, warum nicht?
- Falls G nicht planar ist: Begründen Sie, warum es keine Zeichnung ohne Überkreuzen der Kanten geben kann. Wie viele Kanten muss man entfernen, sodass G planar wird? Geben Sie dafür ein Beispiel und eine dazugehörige Zeichnung an.

Bemerkung: Um zu zeigen, dass ein Graph *nicht* planar ist, genügt es nicht, „drauf los zu zeichnen“ und zu bemerken, dass man nicht alle Kanten einzeichnen kann. Verwenden Sie stattdessen eine Aussage aus der Vorlesung.

Beispiel 13.5. Beantworten Sie die Frage aus Beispiel 13.4 für den Graphen G mit Knotenmenge $\{v_1, \ldots, v_6\}$ und Kantenmenge

$$\big\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_3\},\\ \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_6\}\big\}.$$