

Diskrete Mathematik für Informatikstudien Sommersemester 2022

2. Übungsblatt (15.3.2022)

Beispiel 2.1. Der Divisionsatz besagt: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gibt es eindeutig bestimmte $q \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ mit $n = qm + r$. Beschreiben Sie einen Algorithmus mit Input (m, n) und Output (q, r) , der lediglich die folgenden Operationen/Abfragen verwendet.

- Addition,
- Subtraktion,
- Abfrage, ob eine Gleichung oder Ungleichung wahr ist.

Führen Sie Ihren Algorithmus an der Tafel für das Beispiel $m = 22$ und $n = 153$ durch.

Bemerkung: Eine Beschreibung in Worten im Sinne von „wenn A, dann berechne B, sonst mache C“, „überprüfe D“, „wiederhole so lange, bis E“ etc. genügt.

Beispiel 2.2. Berechnen Sie für die folgenden Zahlenpaare (m, n) mit Hilfe des euklidischen Algorithmus jeweils $\text{ggT}(m, n)$ und Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit

$$am + bn = \text{ggT}(m, n).$$

- (a) $m = 2022, n = 153$;
(b) $m = 22, n = 185$.

Beispiel 2.3. Zeigen Sie per Induktion, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ entweder selbst eine Primzahl ist oder durch eine Primzahl p mit $p \leq \sqrt{n}$ teilbar ist.

Hierbei dürfen Sie *nicht* die Existenz einer Primfaktorzerlegung voraussetzen.

Beispiel 2.4. Aus der Vorlesung wissen wir: Bezeichnet man für $n \in \mathbb{N}$ und eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$ diejenige Zahl als $\nu_n(p)$, für welche $p^{\nu_n(p)} \mid n$ aber *nicht* $p^{\nu_n(p)+1} \mid n$ gilt, dann lässt sich n schreiben als

$$n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_n(p)}.$$

Gegeben sind natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$.

- (a) Zeigen Sie, dass genau dann $m \mid n$ gilt, wenn $\nu_m(p) \leq \nu_n(p)$ für alle $p \in \mathbb{P}$.
(b) Folgern Sie aus (a), dass

$$\text{ggT}(m, n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\{\nu_m(p), \nu_n(p)\}} \quad \text{und} \quad \text{kgV}(m, n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max\{\nu_m(p), \nu_n(p)\}}.$$

Bemerkung: Aus (b) folgt $\text{ggT}(m, n) \cdot \text{kgV}(m, n) = m \cdot n$.

Beispiel 2.5. Bestimmen Sie alle Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$, für welche gilt

- (a) $\text{ggT}(m, n) = 5$ und $\text{kgV}(m, n) = 2310$ bzw.
(b) $\text{ggT}(m, n) = 1$ und $\text{kgV}(m, n) = 225$.

Hinweis: Die Ergebnisse der vorherigen Aufgabe könnten hilfreich sein.