Diskrete Mathematik für Informatikstudien
Sommersemester 2022

3. Übungsblatt (22.3.2022)

Beispiel 3.1. Sei $n \geq 10$ eine natürliche Zahl, für die alle vier Zahlen $n-4$, $n-2$, $n+2$ und $n+4$ Primzahlen sind. Zeigen Sie, dass n sowohl durch 3 als auch durch 5 teilbar ist. Folgern Sie daraus, dass $n \equiv 15 \bmod 30$.

Beispiel 3.2. Gegeben sind die folgenden Relationen auf $X = \mathbb{N}$. Untersuchen Sie sie auf Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität (entweder Nachweis der Eigenschaft oder Gegenbeispiel). Welche der Relationen sind Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{N}$, welche sind Ordnungsrelationen? Geben Sie für Äquivalenzrelationen jeweils ein Repräsentantensystem an.

(a) $mRn \iff \operatorname{ggT}(m,n) = 42$;

(b) $mRn \iff m \mid n$;

(c) $mRn \iff m = n$.

Beispiel 3.3. Gegeben sind die folgenden Relationen auf $X = \mathbb{N}$. Untersuchen Sie sie auf Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität (entweder Nachweis der Eigenschaft oder Gegenbeispiel). Welche der Relationen sind Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{N}$, welche sind Ordnungsrelationen? Geben Sie für Äquivalenzrelationen jeweils ein Repräsentantensystem an.

(a) $mRn \iff 2 \mid (m+n)$;

(b) $mRn \iff 3 \mid (m+n)$.

Beispiel 3.4. Gegeben ist die Relation

$$(m,n)R(p,q) \iff mq = np.$$

Zeigen Sie, dass R auf der Menge $X_1 = \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation ist, auf der Menge $X_2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ aber nicht.

Beispiel 3.5. Sei $X = \{1,2,3,4,5,6\}$. Finden Sie die kleinste Menge $R \subseteq X \times X$, die die Elemente $(1,5)$, $(6,5)$ und $(3,4)$ enthält und eine Äquivalenzrelation ist. (Begründen Sie, dass R diese Eigenschaft hat!) Bestimmen Sie anschließend die Äquivalenzklassen und ein Repräsentantensystem.