

# Diskrete Mathematik für Informatikstudien Sommersemester 2022

## 5. Übungsblatt (5.4.2022)

---

**Beispiel 5.1.** Mit welchen der folgenden Verknüpfungen  $\circ$  bildet  $(\mathbb{R}, \circ)$  eine Halbgruppe, ein Monoid oder sogar eine Gruppe?

(a)  $x \circ y = x$

(b)  $x \circ y = x + y - 3$

**Beispiel 5.2.** Wir wissen aus der Vorlesung, dass für jede natürliche Zahl  $m$  die Menge

$$\mathbb{G}(m) := \{[k]_m \in \mathbb{Z}_m \mid \text{ggT}(k, m) = 1\}$$

mit der Verknüpfung  $[a]_m \circ [b]_m := [ab]_m$  eine Gruppe bildet.

(a) Geben Sie die Menge  $\mathbb{G}(20)$  an und bestimmen Sie die Ordnung aller ihrer Elemente.

(b) Besitzt  $\mathbb{G}(20)$  eine Untergruppe der Ordnung 3 oder der Ordnung 4? Geben Sie jeweils eine solche Untergruppe an oder begründen Sie, warum sie nicht existiert.

**Beispiel 5.3.** Berechnen Sie

$$\varphi(206550) \quad \text{und} \quad \varphi(121121).$$

**Beispiel 5.4.** Gesucht sind die letzten drei Ziffern in der Dezimaldarstellung von

$$a = 2^{5042022}.$$

Berechnen Sie zu diesem Zweck zunächst  $r_1 \in \{0, 1, \dots, 7\}$  und  $r_2 \in \{0, 1, \dots, 124\}$  mit

$$a \equiv r_1 \pmod{8} \quad \text{und} \quad a \equiv r_2 \pmod{125}$$

und verwenden Sie danach den chinesischen Restsatz, um  $a \pmod{1000}$  zu berechnen.

**Beispiel 5.5.** Ermitteln Sie  $a, b, c \in \{0, 1, \dots, 24\}$ , so dass

$$(29^{23})^{2022} \equiv a \pmod{25}, \quad 28^{(29^{2022})} \equiv b \pmod{25} \quad \text{und} \quad 31^{(41^{59})} \equiv c \pmod{25}.$$