Diskrete Mathematik für Informatikstudien
Sommersemester 2022

7. Übungsblatt (3.5.2022)

Verwenden Sie bei Wahrheitstafeln immer für jeden Junktor eine eigene Spalte.

Beispiel 7.1. Gegeben sind die aussagenlogischen Variablen A, B und C.

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, für welche Belegungen von A, B und C mit Wahrheitswerten die folgenden Formeln X_1, Y_1, X_2, Y_2 wahr sind.

$$X_1 = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \qquad Y_1 = A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$
$$X_2 = (A \land B) \lor C \qquad Y_2 = A \land (B \lor C)$$

(b) Überprüfen Sie anhand der Wahrheitstafeln aus (a), welche der Formeln $X_1 \to Y_1$, $Y_1 \to X_1$, $X_2 \to Y_2$ und $Y_2 \to X_2$ Tautologien sind.

Beispiel 7.2. Gegeben seien aussagenlogische Formeln X und Y. Außerdem sei T eine Tautologie und K eine Kontradiktion.

(a) Erstellen Sie eine Wahrheitstafel für die Formel $X \leftrightarrow Y$ und begründen Sie anhand dieser Tafel, dass diese Formel genau dann eine Tautologie ist, falls $X \Leftrightarrow Y$.

(b) Zeigen Sie anhand einer Wahrheitstafel, dass

$$X \to T \iff T, \qquad T \to X \iff X, \qquad X \to K \iff \neg X \qquad \text{und} \qquad K \to X \iff T.$$

Beispiel 7.3. Alex, Brigitte und Cedric stehen unter Verdacht, Spione zu sein.

- Alex behauptet: „Wenn ich Spion bin, ist Brigitte auch einer."
- Brigitte sagt: „Sowohl Alex als auch Cedric sind keine Spione."
- Cedric meint: „Alex und Brigitte sind nicht beides Spione."

(a) Definieren Sie für jede der drei Personen eine aussagenlogische Variable, die angibt, ob die betreffende Person ein Spion ist. Formulieren Sie anschließend die drei obigen Aussagen als logische Formeln und stellen Sie eine Wahrheitstafel für diese Formeln auf.

(b) Falls Spione grundsätzlich lügen und alle anderen Leute immer die Wahrheit sagen, wer von den dreien ist ein Spion und wer nicht?

Verwenden Sie für die folgenden beiden Aufgaben keine Wahrheitstafeln, sondern ausschließlich die Regeln auf der zweiten Seite dieses Übungsblattes.

Beispiel 7.4. Gegeben sind aussagenlogische Formeln X und Y. Zeigen Sie

(a) $(X \to Y) \land \neg Y \quad \Longrightarrow \quad \neg X$;

(b) $X \to (Y \to X) \quad \iff \quad \top$.

Bemerkung: Die Regel (a) heißt „Modus Tollens".

Beispiel 7.5. Gegeben sind aussagenlogische Formeln X, Y und Z. Zeigen Sie, dass die folgenden drei Formeln äquivalent sind.

$$X \to (Y \to Z), \qquad Y \to (X \to Z) \qquad \text{und} \qquad (X \land Y) \to Z.$$

Liste der erlaubten Regeln

Für jegliche aussagenlogische Formeln X, Y, Z gelten die folgenden Regeln.

$$\neg\neg X \iff X \tag{1}$$
$$(X \land Y) \land Z \iff X \land (Y \land Z) \tag{2}$$
$$(X \lor Y) \lor Z \iff X \lor (Y \lor Z) \tag{3}$$
$$X \land Y \iff Y \land X \tag{4}$$
$$X \lor Y \iff Y \lor X \tag{5}$$
$$X \land (Y \lor Z) \iff (X \land Y) \lor (X \land Z) \tag{6}$$
$$X \lor (Y \land Z) \iff (X \lor Y) \land (X \lor Z) \tag{7}$$
$$\neg(X \lor Y) \iff \neg X \land \neg Y \tag{8}$$
$$\neg(X \land Y) \iff \neg X \lor \neg Y \tag{9}$$
$$X \to Y \iff \neg X \lor Y \tag{10}$$
$$X \to Y \iff \neg Y \to \neg X \tag{11}$$
$$X \lor \neg X \iff \top \tag{12}$$
$$X \land \neg X \iff \bot \tag{13}$$
$$X \lor \top \iff \top \tag{14}$$
$$X \land \bot \iff \bot \tag{15}$$
$$(X \to Y) \land (Y \to Z) \implies (X \to Z) \tag{16}$$
$$\bot \implies X \tag{17}$$
$$X \implies \top \tag{18}$$
$$X \land \top \iff X \tag{19}$$
$$X \lor \bot \iff X \tag{20}$$
$$X \land X \iff X \tag{21}$$
$$X \lor X \iff X \tag{22}$$
$$X \land Y \implies X \tag{23}$$
$$X \implies X \lor Y \tag{24}$$
$$X \leftrightarrow Y \iff (X \to Y) \land (Y \to X) \tag{25}$$
$$\neg\top \iff \bot \tag{26}$$