Diskrete Mathematik für Informatikstudien
Sommersemester 2022

8. Übungsblatt (10.5.2022)

Verwenden Sie bei Wahrheitstafeln immer für jeden Junktor eine eigene Spalte.

Beispiel 8.1. Zu den aussagenlogischen Variablen A, B, C sind die Formeln

$$X = (A \leftrightarrow B) \to C \qquad \text{und} \qquad Y = A \leftrightarrow (B \to C)$$

gegeben. Ermitteln Sie mittels einer Wahrheitstafel die n-KNF und n-DNF von X und Y.

Beispiel 8.2. Argumentieren Sie mit Hilfe der Regeln auf der zweiten Seite, dass für aussagenlogische Formeln U, V, W stets die folgenden Beziehungen gelten.

$$\begin{aligned}
(U \wedge V) \vee (U \wedge \neg V) &\iff U \\
(U \wedge V \wedge W) \vee (U \wedge V \wedge \neg W) \vee (U \wedge \neg V \wedge W) \vee (U \wedge \neg V \wedge \neg W) &\iff U \\
U \vee (\neg U \wedge V) &\iff U \vee V
\end{aligned}$$

Beispiel 8.3. Verwenden Sie die in Beispiel 8.2 gezeigten Beziehungen sowie die Regeln

$$\begin{aligned}
(U \vee V) \wedge (U \vee \neg V) &\iff U \\
(U \vee V \vee W) \wedge (U \vee V \vee \neg W) \wedge (U \vee \neg V \vee W) \wedge (U \vee \neg V \vee \neg W) &\iff U \\
U \wedge (\neg U \vee V) &\iff U \wedge V
\end{aligned}$$

(diese dürfen ohne Beweis angenommen werden), um die in Beispiel 8.1 gefundenen n-KNFs und n-DNFs auf maximal drei Klauseln (bzw. duale Klauseln) zu verringern und anschließend die Zahl der Literale in den (dualen) Klauseln zu minimieren.

Beispiel 8.4. Drücken Sie die folgenden Aussagen über natürliche Zahlen in Prädikatenlogik aus. Dabei werden alle verwendeten Variablen automatisch als Elemente der natürlichen Zahlen angenommen. (Man muss also zu Ausdrücken wie $\exists n$ nicht zusätzlich sagen, dass n eine natürliche Zahl sein soll.) Neben Quantoren und Junktoren sind nur folgende Symbole erlaubt:

- Konstante 1;
- Funktionssymbole $+$ und $\cdot$ (zweistellig, übliche Bedeutung);
- Relationssymbol $=$.

(a) x ist ein Teiler von y.

(b) x ist eine Primzahl.

(c) x ist kongruent zu y modulo z.

(d) $\operatorname{ggT}(x, y) = 1$.

Beispiel 8.5. Bringen Sie die folgenden Formeln in pränexe Normalform. Halten Sie dabei die Anzahl der verwendeten Variablen möglichst klein.

(a) $\neg \forall y \Big(\big(\exists x P(x, y)\big) \to \forall z \neg \big(\exists x Q(x, y, z)\big) \Big)$.

(b) $\forall x \big(\exists y \forall z R(x, y, z) \vee \neg \forall z \exists y \neg R(x, y, z) \big)$.

Liste der erlaubten Regeln

Für jegliche aussagenlogische Formeln X, Y, Z gelten die folgenden Regeln.

$$\neg\neg X \iff X \tag{1}$$
$$(X \wedge Y) \wedge Z \iff X \wedge (Y \wedge Z) \tag{2}$$
$$(X \vee Y) \vee Z \iff X \vee (Y \vee Z) \tag{3}$$
$$X \wedge Y \iff Y \wedge X \tag{4}$$
$$X \vee Y \iff Y \vee X \tag{5}$$
$$X \wedge (Y \vee Z) \iff (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \tag{6}$$
$$X \vee (Y \wedge Z) \iff (X \vee Y) \wedge (X \vee Z) \tag{7}$$
$$\neg(X \vee Y) \iff \neg X \wedge \neg Y \tag{8}$$
$$\neg(X \wedge Y) \iff \neg X \vee \neg Y \tag{9}$$
$$X \to Y \iff \neg X \vee Y \tag{10}$$
$$X \to Y \iff \neg Y \to \neg X \tag{11}$$
$$X \vee \neg X \iff \top \tag{12}$$
$$X \wedge \neg X \iff \bot \tag{13}$$
$$X \vee \top \iff \top \tag{14}$$
$$X \wedge \bot \iff \bot \tag{15}$$
$$(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \implies (X \to Z) \tag{16}$$
$$\bot \implies X \tag{17}$$
$$X \implies \top \tag{18}$$
$$X \wedge \top \iff X \tag{19}$$
$$X \vee \bot \iff X \tag{20}$$
$$X \wedge X \iff X \tag{21}$$
$$X \vee X \iff X \tag{22}$$
$$X \wedge Y \implies X \tag{23}$$
$$X \implies X \vee Y \tag{24}$$
$$X \leftrightarrow Y \iff (X \to Y) \wedge (Y \to X) \tag{25}$$
$$\neg\top \iff \bot \tag{26}$$