Diskrete Mathematik für Informatikstudien
Sommersemester 2022

9. Übungsblatt (17.5.2022)

Beispiel 9.1. Gegeben sind $a, b, c, k, n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Vor den Hörsälen A, B und C befinden sich $a+b+c$ Studierende. Von diesen gehen a Studierende in den Hörsaal A, b Studierende in Hörsaal B und c Studierende in Hörsaal C. Argumentieren Sie ohne ausrechnen der Formeln, dass sich die Anzahl der Möglichkeiten hierfür sowohl als

$$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b} \qquad \text{als auch als} \qquad \binom{a+b+c}{b}\binom{a+c}{c}$$

darstellen lässt. Rechnen Sie anschließend anhand der Formel für Binomialkoeffizienten nach, dass beide Ausdrücke die gleiche Zahl liefern.

(b) In einer Lotterie „k aus $n+1$" werden von $n+1$ nummerierten Kugeln k gezogen. Außerdem wird eine weitere Kugel als „Zusatzzahl" gezogen (hierfür nehmen wir offensichtlich $k+1 \leq n+1$ an). Argumentieren Sie ohne Ausrechnen der Formeln, dass man die Anzahl der möglichen Ergebnisse einer Lottoziehung auf die folgenden drei Arten darstellen kann.

$$\binom{n+1}{k}(n-k+1), \qquad (n+1)\binom{n}{k} \quad \text{und} \quad \binom{n+1}{k+1}(k+1).$$

Rechnen Sie anschließend nach, dass diese drei Ausdrücke alle die gleiche Zahl liefern.

Beispiel 9.2. Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Rechnen Sie nach, dass

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

gilt und folgern Sie mit Hilfe des verallgemeinerten binomischen Lehrsatzes, dass

$$\frac{1}{(1-\lambda z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \lambda^k z^k.$$

Zeigen Sie außerdem

$$\frac{1}{(1-\lambda z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \lambda^k z^k.$$

Beispiel 9.3. Bestimmen Sie durch Partialbruchzerlegung die Reihenentwicklung von

$$f(z) = \frac{16}{1 - 7z + 15z^2 - 9z^3}.$$

Beispiel 9.4. Gegeben ist $a_n = 17^n + (n-1)(-5)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Finden Sie geschlossene Ausdrücke (im Sinne von $F(z) = e^z + \frac{1}{1+z} - \ln(z)$ oder ähnlich) für die Potenzreihen

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{und} \qquad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Letztere Potenzreihe bezeichnet man als *exponentielle erzeugende Funktion* der Folge (a_n).

Hinweis: Es gilt $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Beispiel 9.5. Gegeben ist die Funktion

$$F(z) = \frac{z}{1-z} \cdot \frac{d}{dz}\left(z \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)\right).$$

(a) Rechnen Sie nach, dass

$$F(z) = \frac{z + z^2}{(1-z)^4}.$$

(b) Wenden Sie auf (a) den verallgemeinerten binomischen Lehrsatz an und folgern Sie, dass

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} z^n.$$

(c) Rechnen Sie durch formales Differenzieren von Potenzreihen aus, dass

$$G(z) = z \frac{d}{dz}\left(z \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$$

und folgern Sie aus der Regel

$$\frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) z^n,$$

dass

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) z^n.$$