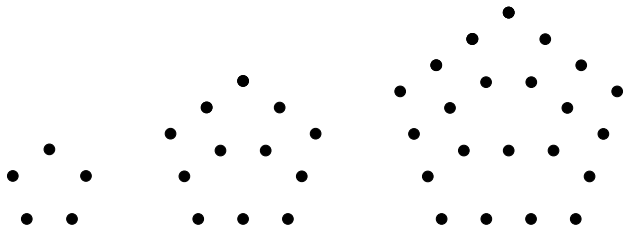
Aufgabe 1. Beweise durch vollständige Induktion die folgende Identität:

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Zusatzaufgabe. Finde die Folge $\left(\frac{n(3n-1)}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in der *On-line Encyclopedia of Integer Sequences*[1] und erkläre den Zusammenhang mit den folgenden Diagrammen:



Welche Zahlen erhält man, wenn man für n negative Werte einsetzt?

Aufgabe 2. Zeige durch vollständige Induktion: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl

$$10^{2n-1} + 3^{4n-2}$$

durch 19 teilbar.

Aufgabe 3. Der Divisionssatz besagt, dass es für jedes Zahlenpaar $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmte Zahlen $q \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ gibt, sodass $n = qm + r$.

Verfasse einen Algorithmus mit Input (m, n) und Output (q, r), der lediglich die folgenden Operationen/Abfragen verwendet:

- Addition $(+)$
- Subtraktion $(-)$
- Abfrage, ob eine Gleichung oder Ungleichung erfüllt ist $(=, <, \leq)$.

Führe den Algorithmus an der Tafel mit dem Input $m = 22$ und $n = 153$ durch.

Aufgabe 4. Bestimme alle Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$, für die gilt

(a) $\mathrm{ggT}(m, n) = 7$ und $\mathrm{kgV}(m, n) = 2730$.
(b) $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ und $\mathrm{kgV}(m, n) = 36$.

Hinweis: Die Identität $\mathrm{ggT}(m, n) \cdot \mathrm{kgV}(m, n) = m \cdot n$ darf verwendet werden.

[1] `www.oeis.org`