

Aufgabe 23. Bestimme, wenn möglich, alle Lösungen der folgenden Kongruenzgleichungssysteme.

$$\begin{array}{ll}
 x \equiv 1 \pmod{6} & x \equiv 1 \pmod{6} \\
 x \equiv 5 \pmod{14} & x \equiv 9 \pmod{14} \\
 (a) \quad x \equiv 13 \pmod{15} & (b) \quad x \equiv 13 \pmod{15} \\
 x \equiv 33 \pmod{35} & x \equiv 33 \pmod{35}
 \end{array}$$

Aufgabe 24. Berechne $2^{31} \pmod{3465}$.

Hinweis:

- (1) 3465 in Primfaktoren $p_i^{k_i}$ zerlegen.
- (2) $2^{31} \pmod{p_i^{k_i}}$ für alle Primfaktoren berechnen.
- (3) Die Lösung mit dem chinesischen Restsatz ermitteln.

Aufgabe 25. Welche der folgenden Strukturen (X, \circ) bilden Halbgruppen, Monoide, Gruppen? In welchen gilt das Kommutativgesetz? Bestimme ggf. das neutrale Element, die invertierbaren Elemente und die jeweiligen Inversen.

- a. (\mathbb{Q}, \circ) mit $x \circ y = x + 2y$
 - b. (\mathbb{N}, \circ) mit $x \circ y = \max(x, y)$.
 - c. (\mathbb{N}, \circ) mit $x \circ y = \min(x, y)$.
 - d. (\mathbb{N}_0, \circ) mit $x \circ y = |x - y|$.
 - e. $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$ mit $x \circ y = x + y + xy$.
 - f. X beliebig, $x \circ y = x$.
- g. Sei U eine Menge, und $X = \{A : A \subseteq U\}$ die Potenzmenge ausgestattet mit der Verknüpfung

$$A \circ B = A \cap B$$

h. X wie vorher mit der Verknüpfung

$$A \circ B = A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

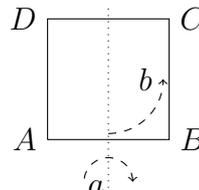
Aufgabe 26. Ergänze die folgende Verknüpfungstabelle so, daß die Gruppenaxiome erfüllt sind. Welches ist das neutrale Element? Ist die Gruppe abelsch?

\circ	a	b	c	d
a		d	a	b
b	d	c		
c	a	b		d
d		d		

Es kann die Tatsache verwendet werden, daß genau eine Lösung existiert.

Aufgabe 27. Wir betrachten das Quadrat $ABCD$ und seine Symmetrien. Wir bezeichnen mit a und b die Transformationen

$$\begin{array}{ll}
 a : A \mapsto B & b : A \mapsto B \\
 B \mapsto A & B \mapsto C \\
 C \mapsto D & C \mapsto D \\
 D \mapsto C & D \mapsto A
 \end{array}$$



- (a) Zeige, daß $b \circ a = a \circ b^3$.
- (b) Stelle alle Transformationen des Quadrats in der Form $a^m \circ b^n$ dar.
- (c) Erstelle die Verknüpfungstabelle.
- (d) Bestimme die Linksnebenklassen der Untergruppe $\{e, a\}$.