Aufgabe 62. Seien $A, B, C \subseteq X$ endliche Mengen und bezeichne $\bar{B} = X \setminus B$. Leite die Formel

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B \cap C| + \left|\bar{B} \cap C\right| + \left|B \cap \bar{C}\right| - |A \cap B \cap C| - \left|A \cap \bar{B} \cap C\right| - \left|A \cap B \cap \bar{C}\right|$$

her.

Aufgabe 63. Gegeben sei die Zahlenfolge $a_n = n \cdot 2^n + 3^n$. Finde geschlossene Ausdrücke für die erzeugenden Potenzreihen

$$(a) \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad\qquad (b) \qquad E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n;$$

Letztere bezeichnet man als *exponentielle erzeugende Potenzreihe.*

Aufgabe 64. Bestimme mittels erzeugender Funktionen die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von 7 Kugeln aus einer Urne mit 6 weißen, 6 roten und 6 schwarzen Kugeln, wobei nur eine gerade Zahl weißer, eine ungerade Zahl schwarzer, und eine durch 3 teilbare Zahl roter Kugeln entnommen werden darf.

Hinweis: Die Reihenfolge der Kugeln soll keine Rolle spielen.

Aufgabe 65. Zeige mit Hilfe der Binomialreihe (C.2.6), dass für $n \in \mathbb{N}$ die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} x^k$$

gilt.

Aufgabe 66. Auf wieviele Arten kann man 25 Cent mit 7 Münzen bezahlen?

Hinweis: Beispiel (C.2.23) mit der Bewertung k $\to x^k \cdot y$.

Aufgabe 67. Berechne für alle n

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Hinweis:

(1) Betrachte

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} \right)$$

(2) verwende Bemerkung (C.2.24) um die erzeugende Funktion $\sum s_n x^n$ zu bestimmen.

(3) Verwende Aufgabe 65, um eine Formel für deren Koeffizienten herzuleiten.

Aufgabe 68. Berechne Formeln für die Koeffizienten a_n und b_n der Potenzreihen

$$\text{(a)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{-13\,x^2 + x + 2}{6\,x^3 + x^2 - 4\,x + 1} \qquad\qquad \text{(b)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \frac{-8\,x^2 + 14\,x - 7}{4\,x^3 - 8\,x^2 + 5\,x - 1}$$

Hinweis zu (b): Skriptum C.2.15.

Aufgabe 69. Löse die Rekursionsgleichungen

$$(a) \qquad a_{n+2} - a_{n+1} - 3a_n = 2^n, \quad n \geq 0 \qquad a_0 = 1 \qquad a_1 = 2$$

$$(b) \qquad a_{n+2} - 2a_{n+1} - 8a_n = (n+1)\,2^n, \quad n \geq 0 \qquad a_0 = 1 \qquad a_1 = 1.$$