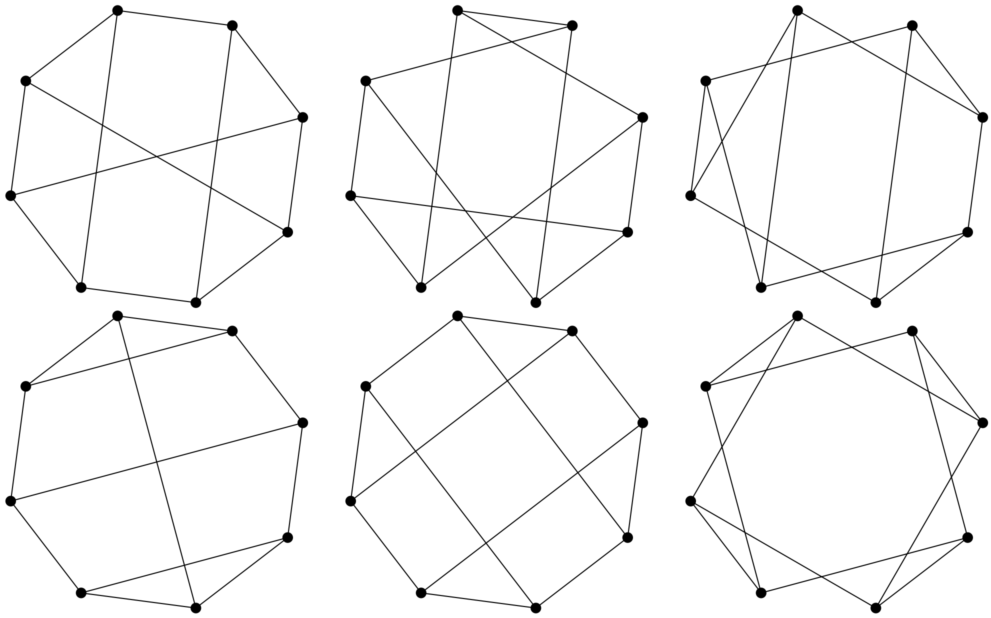
**Aufgabe 70.** Zwei Graphen $G_1$ und $G_2$ heißen *isomorph*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : V(G_1) \to V(G_2)$ zwischen beiden Knotenmengen gibt, sodass $[x, y] \in E(G_1) \iff [f(x), f(y)] \in E(G_2)$. Isomorphe Graphen werden üblicherweise identifiziert. Die folgenden Bilder zeigen sechs Graphen, von denen jeweils zwei zueinander isomorph sind. Finde die drei isomorphen Paare und begründe jeweils, warum Graphen aus verschiedenen Paaren nicht isomorph sind.



**Aufgabe 71.** Bestimme alle nicht-isomorphen Graphen mit $n = 2$, 3, oder 4 Knoten (nicht-zusammenhängende Graphen miteingeschlossen).

**Aufgabe 72.**

(a) Zeige, dass in einem ungerichteten Graphen $G$ die Relation

$$x \, R \, y \iff \exists \text{ Weg von } x \text{ nach } y$$

eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Welche Relation erhält man, wenn man "Weg" durch "Pfad" ersetzt?

(c) Weise nach, dass die entsprechende Aussage für gerichtete Wege in gerichteten Graphen falsch ist. Welche Eigenschaften einer Äquivalenzrelation sind nicht erfüllt?

**Aufgabe 73.** Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Der *Abstand* $d(x, y)$ zwischen zwei Knoten $x$ und $y$ ist die Länge des kürzesten Weges von $x$ nach $y$. Der *Durchmesser* von $G$ ist definiert als

$$\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in V} d(x, y).$$

Zeige:

(a) $d(x, x) = 0$ für alle $x \in V$.

(b) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in V$.

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ für alle $x, y, z \in V$.

(d) Für alle $x \in V$ gibt es ein $y \in V$ sodass $d(x, y) \geq \frac{1}{2} \operatorname{diam}(G)$.

**Aufgabe 74.** Die Gradfolge eines Graphen ist die Folge der Grade der einzelnen Knoten in absteigender Ordnung.

(a) Bestimme alle möglichen Gradfolgen eines Graphen mit vier Knoten (nicht-zusammenhängende Graphen miteingeschlossen).

(b) Ist es möglich, Graphen (ohne Schleifen und Mehrfachkanten) mit den folgenden Gradfolgen zu konstruieren?

| | | | |
|---|---|---|---|
| (i) | $(3,3,3,3)$ | (ii) | $(4,3,2,1)$ |
| (iii) | $(3,3,3,2,1)$ | (iv) | $(1,1,1,1,1)$ |

(c) Finde zwei zueinander nicht isomorphe Graphen mit der Gradfolge $(3,3,3,3,2,2)$.

(d) Zeige, daß die Gradfolge eines Graphen nicht aus lauter verschiedenen Zahlen bestehen kann, d.h., in jedem Graphen haben mindestens zwei Knoten den gleichen Grad.

**Aufgabe 75.** Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und Kanten

$$E = \{[1,2], [1,4], [2,3], [2,4], [2,5], [3,4], [3,5], [3,6], [4,5], [5,6]\}.$$

(a) Bestimme die Adjazenzmatrix und die Anzahl der Wege der Länge 6 von Knoten 2 nach Knoten 5.

(b*) Berechne eine Formel für die Anzahl der Wege von Knoten 2 nach Knoten 5.

*Hinweis:* Die Hilfe des Computers ist erlaubt.