(1.17) Satz. *Die Anzahl der Variationen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ mit Wiederholung der Ordnung $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$, wobei k_1 Einser, k_2 Zweier usw. vorkommen, ist gegeben durch den* ***Multinomialkoeffizient***

$$\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{k!}{k_1!\, k_2! \cdots k_n!}. \tag{1.18}$$

Alternativ dazu kann man 1.18 als die Anzahl der verschiedenen Permutationen der Folge

$$(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k_1\times}, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{k_2\times}, \dots, \underbrace{n, n, \dots, n}_{k_n\times})$$

betrachten (Stichwort ***Anagramme****), man spricht dann auch von* ***Permutationen mit Wiederholung****.*

(1.19) Beispiel. Es gilt also die Identität

$$n^k = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=k} \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n}$$

(1.20) Beispiel. Wieviele mögliche Ausgangskombinationen gibt es für das Kartenspiel "Bridge"? (Insgesamt 52 Karten, jeder der vier Teilnehmer bekommt 13 Karten).

Lösung. Dies ist eine Variation der Menge der Spieler mit Wiederholung: Jeder Karte wird die Nummer desjenigen Spielers zugeteilt, der die Karte nach dem Austeilen in der Hand hält. Gefragt ist also nach der Anzahl der Funktionen $f : \{1, 2, \dots, 52\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, sodaß jeder Wert 13 mal vorkommt. Diese Anzahl ist nach Satz (1.17) gegeben durch den Multinomialkoeffizienten $\binom{52}{13,13,13,13} = 53644737765488792839237440000$. Anmerkung: Dies ist die Anzahl der Ausgangskombinationen, wenn die Reihenfolge der Teilnehmer wichtig ist.

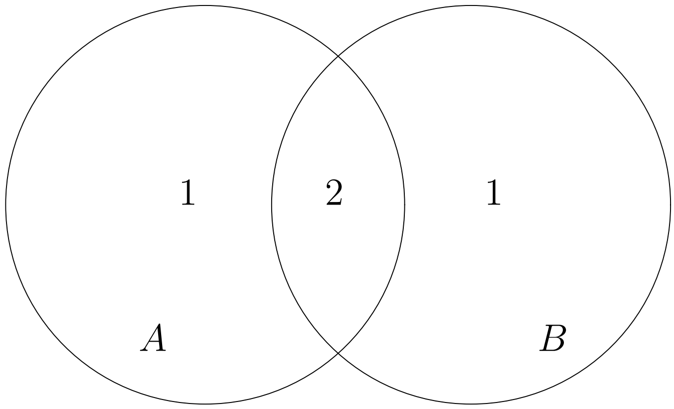
(1.21) Das Taubenschlagprinzip. Wenn $n + 1$ Tauben in n Taubenschlägen sitzen, dann gibt es darunter einen Taubenschlag, der mindestens zwei Tauben enthält.

(1.22) Beispiel. Jede $n+1$ elementige Teilmenge von $\{1, 2, \dots, 2n\}$ enthält zwei (verschiedene) Zahlen a und b, sodaß a Teiler von b ist.

Lösung. Sei $M = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\} \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$. Jedes Element dieser Menge hat eine eindeutige Produktzerlegung $a_i = 2^{k_i} q_i$, wobei q_i eine ungerade Zahl ist. Da es nur n ungerade Zahlen zwischen 1 und $2n$ gibt, müssen mindestens zwei der q_i gleich sein und die kleinere der beiden Zahlen a_i teilt die größere.

(1.23) Beispiel. Seien A, B und C Mengen, dann gilt

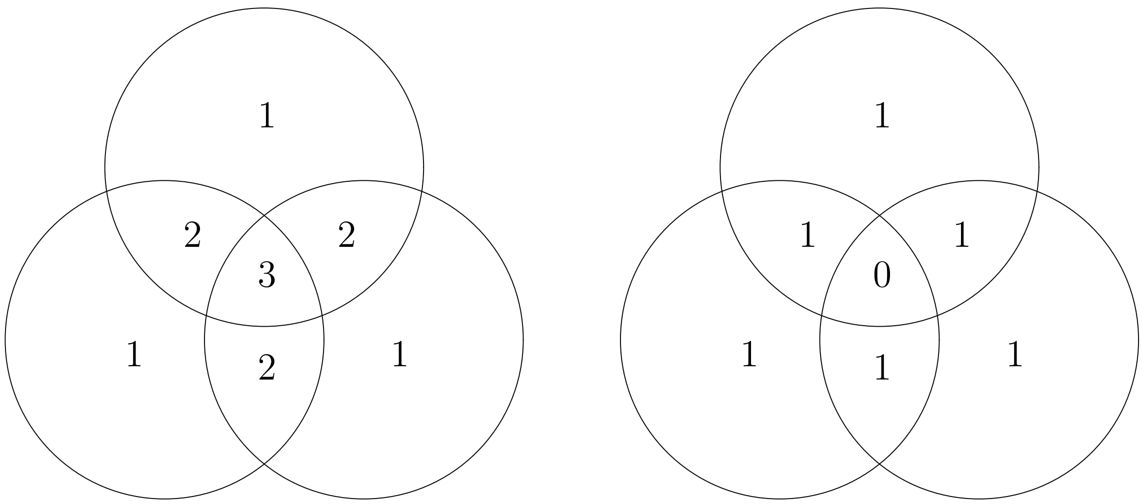
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$|A| + |B|$

Abbildung 1.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



$|A| + |B| + |C|$

$|A| + |B| + |C|$
$- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$

Abbildung 2.

Das **Inklusions-Exklusionsprinzip** löst Abzählungsaufgaben für Vereinigungsmengen von der Art der vorhergehenden und der folgenden Beispiele.

(1.24) Beispiel. Bestimmen Sie die Anzahl der Permutationen des Wortes *aabbcc* in denen benachbarte Buchstaben jeweils verschieden sind.

Beweis. Die Anzahl aller verschiedenen Permutationen von $aabbcc$ ist die Anzahl der Variationen mit Wiederholung der Menge $\{a, b, c\}$ der Ordnung 6, in denen jeder Buchstabe zwei Mal vorkommt, und nach (1.17) gegeben durch den Multinomialkoeffizienten

$$\binom{6}{2,2,2}.$$

Sei A_a die Menge der Wörter in denen die beiden a nacheinander stehen, analog A_b und A_c. Dann ist die gesuchte Menge komplementär zur Menge $A_a \cup A_b \cup A_c$ der Wörter, in denen zumindest einer der Buchstaben die geforderte Bedingung nicht erfüllt. Weiters sei $A_{ab} = A_a \cap A_b$ die Menge derjenigen Wörter, in denen sowohl die beiden a als auch die beiden b nebeneinander stehen, dann erhalten wir

$$|A_a \cup A_b \cup A_c| = |A_a| + |A_b| + |A_c| - |A_{ab}| - |A_{ac}| - |A_{bc}| + |A_{abc}|\,.$$

Die Anzahl der Wörter, in denen a die Bedingung nicht erfüllt ist gleich der Anzahl der verschiedenen Permutationen des Wortes $\tilde{a}bbcc$ (wir fassen die beiden Buchstaben aa als einen Buchstaben $\tilde{A}$ auf), und gegeben durch

$$|A_a| = \binom{5}{1,2,2}.$$

Dasselbe gilt für A_b und A_c. Analog dazu gilt

$$|A_{ab}| = \binom{4}{1,1,2}$$

und

$$|A_{abc}| = \binom{3}{1,1,1} = 3!.$$

Insgesamt erhalten wir die gewünschte Anzahl

$$\begin{aligned}\binom{6}{2,2,2} &- |A_a| - |A_b| - |A_c| + |A_{ab}| + |A_{ac}| + |A_{bc}| - |A_{abc}| \\ &= \binom{6}{2,2,2} - 3\binom{5}{1,2,2} + 3\binom{4}{1,1,2} - \binom{3}{1,1,1} = 30\end{aligned}$$

Die allgemeine Formel hat die folgende Gestalt.

(1.25) Satz. (Siebformel).

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \\ + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

oder in geschlossener Form

(1.26)
$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$