

# Diskrete Mathematik für Lehramt Informatik

## Sommersemester 2021

### 5. Übungsblatt (22.4.2021)

**Beispiel 5.1.** Sei  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Finden Sie die kleinste Menge  $R \subseteq X \times X$ , die die Elemente  $(1, 4)$ ,  $(6, 4)$  und  $(3, 5)$  enthält und eine Äquivalenzrelation ist. Bestimmen Sie anschließend die Äquivalenzklassen und ein Repräsentantensystem.

**Beispiel 5.2.** Zu einer Menge  $X$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{A}(X)$  die Menge aller Äquivalenzrelationen auf  $X$ . Auf  $\mathcal{A}(X)$  definieren wir die Relation

$$R_1 \leq R_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad R_1 \subseteq R_2$$

(wobei wir  $R_1, R_2$  als Teilmengen von  $X \times X$  auffassen).

(a) Zeigen Sie, dass  $\leq$  eine Ordnungsrelation auf  $\mathcal{A}(X)$  ist.

(b) Für  $x \in X$  und  $R_1, R_2$  betrachten wir die Äquivalenzklassen

$$C_1(x) := \{y \in X \mid xR_1y\} \quad \text{und} \quad C_2(x) := \{y \in X \mid xR_2y\}$$

und die Prädikate

$$P(x): \quad C_1(x) \subseteq C_2(x),$$

$$Q(x): \quad C_1(x) \not\subseteq C_2(x).$$

Formulieren Sie mit Hilfe dieser Prädikate sowie mit Quantoren und Junktoren aussagenlogische Formeln (also Formeln wie  $\forall x \in X: Q(x)$  oder  $(\exists x \in X: P(x)) \wedge (\forall y \in X: \neg Q(y))$ ), die äquivalent zu den folgenden Aussagen sind.

(i)  $R_1 \leq R_2$ ;

(ii)  $(R_1 \leq R_2) \wedge (R_1 \neq R_2)$ ;

(iii)  $R_1 \not\leq R_2$ .

**Beispiel 5.3.** Zeigen Sie, dass

$$xRy \quad :\Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Z}$$

eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{R}$  ist und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen und ein Repräsentantensystem.

**Beispiel 5.4.** Zeigen Sie, dass die Teilbarkeitsrelation

$$mRn \quad :\Longleftrightarrow \quad m \mid n$$

eine Ordnungsrelation auf  $\mathbb{N}$  ist, die außerdem die Bedingung

$$(kRm \wedge kRn) \quad \Longrightarrow \quad kR(m+n)$$

erfüllt.