Diskrete Mathematik für Lehramt Informatik
Sommersemester 2021

7. Übungsblatt (6.5.2021)

Beispiel 7.1. Zeigen Sie ohne Verwendung der Primfaktorzerlegung, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ entweder selbst eine Primzahl ist oder durch eine Primzahl p mit $p \leq \sqrt{n}$ teilbar ist.

Hinweis: Induktion.

Beispiel 7.2. Gegeben sind Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ und die Primfaktoren $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ von $a \cdot b$. Die Primfaktorzerlegungen von a und b können wir schreiben als

$$a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i} \qquad \text{und} \qquad b = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i},$$

wobei $m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathrm{ggT}(a,b) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{m_i,n_i\}} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{kgV}(a,b) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{m_i,n_i\}}$$

gilt und folgern Sie hieraus, dass $a \cdot b = \mathrm{ggT}(a,b) \cdot \mathrm{kgV}(a,b)$.

Beispiel 7.3. Verfassen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, welcher zu einer gegebenen Zahl $n \in \mathbb{N}$ und einer Liste aller Primzahlen $p \leq n$ die Primfaktorzerlegung von n ermittelt. Führen Sie den Algorithmus für das Beispiel $n = 1911$ per Hand durch.

Anmerkung: Der Algorithmus muss nicht in einer formalen Programmiersprache geschrieben sein; eine informelle Beschreibung der Schritte (wie z.B. beim euklidischen Algorithmus in der Vorlesung) genügt.

Beispiel 7.4. Gegeben seien $m \in \mathbb{N}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit

$$a \equiv b \bmod m \qquad \text{und} \qquad c \equiv d \bmod m.$$

Zeigen Sie, dass dann auch

$$a + c \equiv b + d \bmod m \qquad \text{und} \qquad a \cdot c \equiv b \cdot d \bmod m$$

gilt.