

**Aufgabe 8.** Seien  $x$  und  $y$  reelle Zahlen.

- (a) Formuliere die folgenden Aussagen in Umgangssprache.
  - (i)  $\forall x \exists y : x = y^3$
  - (ii)  $\exists x \forall y : xy \neq 0$
  - (iii)  $\forall x \exists y : x \geq y$
  - (iv)  $\exists x \forall y : x \geq y$
- (b) Welche der Aussagen sind wahr?
- (c) Verneine die Aussagen und forme sie solange um, bis sämtliche Quantoren links stehen.

**Aufgabe 9.** Zu zwei Mengen  $M$  und  $N$  betrachten wir die Aussagen

- A: Jedes Element von  $M$  liegt auch in  $N$ .
- B: Kein Element liegt in beiden Mengen zugleich.
- C: Nicht alle Elemente von  $N$  liegen auch in  $M$ .

- (a) Formuliere diese Aussagen mit Quantoren und Junktoren und forme sie solange um, bis sämtliche Quantoren ganz links stehen.
- (b) Gib für jede einzelne Aussage passende Mengen  $M$  und  $N$  an, die sie erfüllen.
- (c) Gibt es Mengen  $M$  und  $N$ , die alle drei Aussagen erfüllen?

**Aufgabe 10.** Welche der folgenden Aussagen sind allgemeingültig?

Wahre Aussagen beweisen mit Venndiagramm oder logischen Argumenten, falsche Aussagen durch Gegenbeispiel nachweisen.

- (a)  $\emptyset \subseteq \emptyset$
- (b)  $\emptyset \in \emptyset$
- (c)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
- (d)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- (e)  $(A \in B) \wedge (B \subseteq C) \rightarrow (A \in C)$
- (f)  $(A \notin B) \wedge (B \subseteq C) \rightarrow (A \notin C)$
- (g)  $(A \in B) \wedge (B \in C) \rightarrow (A \in C)$

**Aufgabe 11.** Welche der folgenden Aussagen sind allgemeingültig?

(Gegenbeispiel oder Beweis mit (i) Venndiagramm und (ii) logischen Argumenten)

- (a)  $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
- (b)  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
- (c)  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

**Aufgabe 12.** Untersuche die folgenden Relationen auf die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität und stelle fest, ob jeweils eine Äquivalenzrelation oder Halbordnungsrelation vorliegt.

- (a)  $X = \mathbb{N}, mRn \iff m - n = 7$
- (b)  $X = \mathbb{N}, mRn \iff \text{ggT}(m, n) = 16$
- (c) Menge  $X = \mathbb{Z}$ , Relation  $xRy \iff x = |y|$ .
- (d)  $X = \mathbb{R}, xRy \iff x \cdot y \geq 0$
- (e)  $X = \mathbb{N}, mRn \iff 2|(m + n)$
- (f) Menge  $X = \{a, b, c, d\}$ , Relation  $R$  entsprechend der folgenden Tabelle:

	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	×	×	×	×
$b$		×		
$c$			×	
$d$		×	×	×

- (g)  $X = \{a, b, c\}, R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$ . Was muss aus der Relation  $R$  entfernt werden, damit sie antisymmetrisch wird? (Es gibt mehrere Möglichkeiten!)

**Aufgabe 13.** Zeige daß durch

$$xRy \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{R}$  definiert wird, bestimme die Äquivalenzklassen und eine Repräsentantensystem.