Aufgabe 20. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $x, y, x', y' \in \mathbb{Z}$. Zeige: Wenn

$$x \equiv x' \mod m \qquad \text{und} \qquad y \equiv y' \mod m,$$

dann gilt auch

$$x + y \equiv x' + y' \mod m \qquad \text{und} \qquad xy \equiv x'y' \mod m.$$

Aufgabe 21. Finde mithilfe des euklidischen Algorithmus für jedes der folgenden Zahlenpaare (m, n) den größten gemeinsamen Teiler d und Zahlen a und b, sodass $am + bn = d$.

(a)	$(233, 89)$	(b)	$(425, 2023)$
(c)	$(377, 144)$	(d)	$(228, 141)$
(e)	$(144, 347)$	(f)	$(231, 142)$

Aufgabe 22. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sodass $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Zeige, dass $\mathrm{ggT}(m + n, m - n) = 1$ oder 2.

Aufgabe 23. Finde (mit dem Computer[1]) die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die $n^2 + n + 41$ *keine* Primzahl ist.

Aufgabe 24. Zeige: Wenn n keine Primzahl ist, dann kann auch $2^n - 1$ keine Primzahl sein.

Aufgabe 25. Zeige: Wenn $k \geq 6$ und sowohl $k - 1$ als auch $k + 1$ Primzahlen sind, dann ist k durch 6 teilbar.

Aufgabe 26. Verfasse einen möglichste effizienten Algorithmus, der zu einer gegebenen Zahl n und einer Liste aller Primzahlen $p \leq n$ die Primfaktorzerlegung von n ermittelt.
Führe den Algorithmus für das Beispiel $n = 1911$ per Hand durch.

[1] Der entsprechende Code/die Vorgangsweise ist zu präsentieren!